Inż. WŁADYSŁAW TAKLIŃSKI
Profesor Akademii Górniczej w Krakowie

# MECHANIKA TEORETYCZNA

Tom I.

## STATYKA

Nakładem Sekcji Wydawniczej
Stowarzyszenia Studentów Akademii Górniczej

Kraków 1945

Inż. Władysław Takliński
Profesor Akademii Górniczej
w Krakowie

# MECHANIKA TEORETYCZNA

## TOM I

## STATYKA I KINEMATYKA



Nakładem Sekcji Wydawniczej
Stowarzyszenia Studentów Akademii górniczej w Krakowie
KRAKÓW 1945 r.

W s t ę p

d o m e c h a n i k i t e o r e t y c z n e j

Zjawiskiem nazywamy wszystko to, co w ten lub inny sposób oddziaływa na nasze organy zmysłowe. Dla dogodności i możności badania zjawiska podzielone są, z powodu różnych przyczyn, na grupy, które stanowią zakres badania różnych nauk. Pośród różnych możliwych zjawisk, znanych człowiekowi, spotykamy zjawisko nazywane r u c h e m. Nauka o r u c h u nosi nazwę m e c h a n i k i. Jak wyżej nadmieniono, ruch jest zjawiskiem znanym każdemu człowiekowi z życia codziennego. Aby zbadać istotę r u c h u, wystarczy niewielki wysiłek myśli, który z łatwością oddzieli w każdym ruchu to, co stanowi jego oznaki podstawowe, niezbędne; otrzymujemy wtedy następujące określenie dla ruchu:

r u c h ciała jest zbiorem ruchów poszczególnych jego punktów, a ruch punktu jest to stopniowe i ciągłe przesuwanie go przez punkty przestrzeni, wytwarzające się z biegiem czasu.

Z określenia dopiero co wypowiedzianego widzimy, że podstawą pojęcia ruchu są pojęcia przestrzeni i czasu. Te pojęcia należą do rzędu pojęć podstawowych, nie wymagających określenia.

Jednakże prócz tych pojęć mamy w określeniu ruchu jeszcze coś takiego, co wymaga dodatkowego omówienia. Mianowicie, aby rozwiązać zagadnienie, czy jakiś punkt porusza się lub nie, należy porównać jego położenie z położeniem ciał otaczających, które przyjmujemy za nieruchome. Takie ciała przyjmowane za nieruchome tworzą u k ł a d o d n i e s i e n a.

Nie trudno pokazać na przykładach, że wybór układu odniesienia ma doniosłe znaczenie przy wyjaśnianiu ruchu. Niech np. na pokładzie okrętu znajduje się człowiek, jeżeli okręt oddala się od przystani, a człowiek na pokładzie jest nieruchomy, to przyjmując za układ odniesienia okręt, mówimy, że człowiek się nie porusza; ale gdy tylko weźmiemy za układ odniesienia przystań, to będziemy zmuszeni powiedzieć, że człowiek jest w ruchu. Dopóki ruch okrętu jest niewielki, człowiek może iść po pokładzie tak, że względem przystani będzie nieruchomy, chociaż względem okrętu będzie w ruchu. Wreszcie możliwy jest i taki wypadek, kiedy i względem przystani i względem okrętu idący po pokładzie znajduje się w ruchu.

Z tego co powiedziano wyżej, widać, że pojęcie o ruchu należy w rzeczywistości do pojęć względnych i że dla jasnego i kompletnego przedstawienia ruchu koniecznym jest wskazać ten układ odniesienia, względem którego dane zjawisko ruchu się rozpatruje. Najczęściej, ch chociaż to nie jest koniecznym, przyjmujemy za układ odniesienia ziemię, albo przedmioty na niej się znajdujące i względem niej nieruchome.

Odróżnia się, co i my będziemy czynić, r u c h b e z w z g l ę d n y i r u c h w z g l ę d n y.

Jeżeli układ odniesienia względem jakiegoś drugiego układu odniesienia jest nieruchomy, nazywamy ruch r u c h e m b e z w z g l ę d n y m, jeżeli zaś układ odniesienia względem drugiego układu odniesienia jest ruchomy, nazywamy ruch w z g l ę d n y m w stosunku do pierwszego układu odniesienia a jednocześnie b e z w w z g l ę d n y m w stosunku do drugiego układu odniesienia.

"W czasach starożytnych, jak mówi Newton, w swoim wstępie do "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", dzielono mechanikę na dwie części: teoretyczną, opierającą się na rozumowaniu i dowodzeniu ścisłym, oraz praktyczną. Z tej ostatniej powstały wszystkie te rzemiosła, które nazywamy mechanicznymi i od których sama nauka nazwę tę otrzymała; ale ponieważ rzemieślnik ma zwyczaj pracować z małym stopniem dokładności, poczęto odróżniać mechanikę od geometrii w taki sposób, że wszystko co jest ścisłe wchodzi w zakres geometrii, nieścisłe zaś w zakres mechaniki. Jednakże niedokładności powstające przy pracy pochodzą od wykonawców a nie od sztuki jako takiej; wykonawca pracujący z większą dokładnością zasługuje na miano lepszego mechanika w stosunku do wykonywującego pracę mniej dokładnie.

Wykreślanie linii prostych i kół, podstawa geometrii, jest zadaniem mechaniki. Geometria przyjmuje te linie jako pewnik, nie ucząc wykreślania tychże. Studiujący geometrię uczy się, w jaki sposób przy pomocy tych linii i kół rozwiązać zagadnienia geometryczne. Samo wykreślanie linii prostych i kół jest także zagadnieniem, ale mechanicznym; mechanika podaje nam rozwiązanie tego zagadnienia, geometria zaś pokazuje, jak z tego korzystać. Wychwala się geometrię za to, że wychodząc z niewielu zasad na wstępie przyjętych, tak wiele się z niej osiąga. Ale geometria osnuta na mechanicznych sposobach jest niczym innym, jak to już nadmieniono, jak tą częścią mechaniki ogólnej, która dowodzi o sposobach mierzenia ścisłego. Wszelkiego rodzaju prace i rzemiosła wymagają ciągłego przesuwania ciał, zatem wszystko co się tyczy wielkości, odnosi się do geometrii, wszystko zaś tyczące się ruchu do mechaniki. W tym znaczeniu mechanika jest nauką o ruchach pochodzących od działania

nia jakichkolwiek sił i naodwrót o siłach potrzebnych dla podtrzymania jakiegokolwiek ruchu, jest zatem nauką ściśle wyłożoną z dokładnymi dowodzeniami.

Takie określenie nadane mechanice teoretycznej przez jego twórcę jest najwięcej kompletne i ogólne, ażeby pokazać, że ta nauka nie jest jedynie rozumowaniem abstrakcyjnym. Newton wyznacza i ogólne zadanie mechaniki teoretycznej: podług ruchów powstających w przyrodzie odszukać siły, a potem według znalezionych sił inne zjawiska. Zadanie mechaniki tak wyznaczone robi z tej nauki podwalinę nowoczesnego przyrodoznawstwa i nowoczesnej techniki; należy tałko przy wykładzie wzorować się na wskazówkach Newtona: badać zjawiska powstające w przyrodzie i siły je wytwarzające.

Dla dogodności studiowania mechaniki teoretycznej dzielimy ją na kilka części:

1/ s t a t y k ę, której początek sięga czasów Arystotelesa i Archimedesa, a której zadaniem jest rozpatrywanie równowagi sił i zamiana jednych sił przez drugie,

2/ k i n e m a t y k ę, której pierwsze początki dane są przez Galileusza i która rozpatruje ruchy ciał niezależnie od przyczyn je wywołujących i

3/ d y n a m i k ę, której podstawy są utworzone i doprowadzone przez Newtona do wysokiego stopnia dokładności, a której przedmiotem jest badanie ruchów w zależności od przyczyn je wywołujących.

Angielscy autorowie dzielą mechanikę teoretyczną na dwie części: k i n e m a t y k ę i k i n e t y k ę, włączając w tę ostatnią statykę i dynamikę.

W mechanice teoretycznej rozpatrujemy zagadnienia o równowadze i ruchu ciał stałych i ciekłych, t.j. płynów i gazów. Ciała te w mechanice teoretycznej idealizujemy, t.j. przyjmujemy jako doskonałe te własności ciał, które w rzeczywistości w przyrodzie zachodzą tylko w pewnych granicach. Tak np. ciało stałe uważamy za doskonale sztywne, t.j. takie, że odległość między dwoma dowolnymi punktami tego ciała nie ulega zmianie. Ciecz rozpatrujemy jako bezwzględnie pozbawioną lepkości i ściśliwości - nazywamy ją wtedy c i e c z ą d o s k o n a ł ą i t.d.

Oprócz takich idealizowanych ciał rozpatrujemy w mechanice teoretycznej ciało fikcyjne o znikomo małych rozmiarach. Takie ciało nazywamy p u n k t e m m a t e r i a l n y m. Gdy dzielimy ciało na coraz mniejsze części, to jako granicę otrzymamy punkt materialny o masie znikomo małej. Gdy zaś będziemy zmniejszać wymiary ciała do znikomo małych, pozostawiając jego masę bez zmiany, otrzymamy punkt materialny o masie skończonej. Przykładem takiego punktu materialnego może być środek ciężkości ciała sztywnego i wiadomo, że siła działająca na środek ciężkości ciała sztywnego nadaje mu ten sam ruch, niezależnie od kształtu ciała, byleby tylko masa ciała nie uległa zmianie

Widzimy więc, że środek ciężkości ciała sztywnego jest z punktu widzenia mechaniki teoretycznej równoważny z punktem materialnym o masie skończonej.

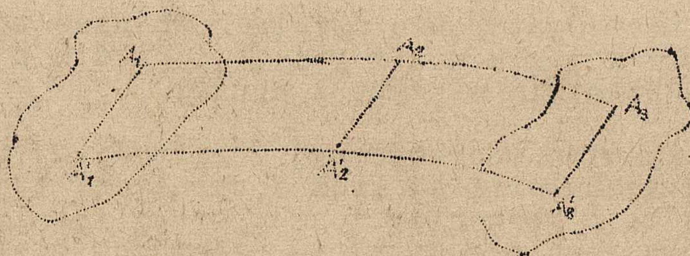
Każde ciało w mechanice teoretycznej rozpatrujemy jako złożone z punktów materialnych. Dlatego też każde ciało nazywamy u k ł a d e m p u n k t ó w m a t e r i a l n y c h.

Ciało sztywne nazywamy n i e z m i e n n y m u k ł a d e m p u n k t ó w m a t e r i a l n y c h, albo też często b r y ł ą m a t e r i a l n ą.

Układ punktów materialnych nazywamy s w o b o d n y m, gdy możemy przesunąć go z zajmowanego w przestrzeni położenia w dowolne sąsiednie położenie.

Rozróżniamy różne ruchy układu punktów materialnych; najprostszym z nich jest ruch postępowy.

Mówimy o układzie punktów materialnych, że jest w ruchu postępowym wtedy, gdy dwie dowolne i przecinające się wzajemnie płaszczyzny, przeprowadzone przez punkty układu materialnego pozostają podczas jego ruchu równoległymi do poprzednio zajmowanych położeń. Stąd wynika, że podczas ruchu postępowego każda prosta przeprowadzone przez punkty układu pozostaje do siebie równoległą. Jeżeli pod-

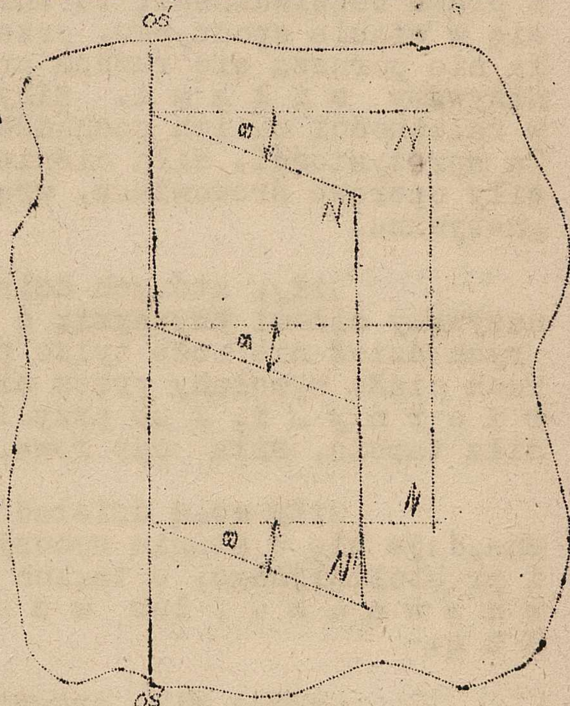


Rys. 1.

czas ruchu postępowego jeden z punktów układu materialnego porusza się wzdłuż pewnej krzywej, to wszystkie inne punkty tego układu poruszają się wzdłuż krzywych równoległych do tej krzywej /rys. 1/. Jeżeli przytem droga zakreślona przez jeden z punktów układu jest proporcjonalna do czasu zużytego na jej zakreślenie, wtedy nazywamy ruch układu p o s t ę p o w y m i j e d n o s t a j n y m. Szczególnym wypadkiem tego ruchu jest ruch p r o s t o l i n i j n y i j e d n o s t a j n y.

Drugim równie prostym ruchem jest ruch o b r o t o w y; nazywamy nim ruch dokoła pewnej osi, jeżeli wszy-

stkie punkty układu materialnego zakreślają podczas tego ruchu koła o płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu i środkach leżących na tej osi. Położenie punktów układu w tym wypadku jest wyznaczone za pomocą kąta liniowego /płaskiego/ odpowiadającego odnośnemu kątowi dwuściennemu /bryłowemu/, utworzonemu przez dowolnie obraną płaszczyznę nieruchomą, przeprowadzoną przez oś obrotu oraz płaszczyznę ruchomą, sztywnie związaną z punktami układu materialnego, a przechodzącą przez oś obrotu. Kąt ten nazywamy kątem o b r o t u układu materialnego. Na rys.2 oznaczyliśmy go przez




Rys. 2.

Te dwa ruchy, postępowy i obrotowy, których określenie podaliśmy na wstępie, należą do ruchów prostych, zasadniczych, ponieważ wszystkie inne ruchy, jak się okaże przy ich badaniu, mogą być sprowadzone do ruchu postępowego i obrotowego.

Wykład kursu mechaniki teoretycznej rozpoczniemy od tej jej części, którą nazywamy statyką i która rozważa ciała w stanie spoczynku. Chociaż statyka stanowi tylko szczególny przypadek w dynamice, mianowicie ten przypadek, kiedy prędkości ciał są przyrównywane do zera, ale ten przypadek stanowi zagadnienie bez porównania łatwiejsze od zagadnienia ogólnego i w dodatku posiada on sam przez się znaczenie bardzo ważne ze względu na wyniki bezpośrednie, brz których jest niemożebną rzeczą przystąpić do studiowania nauk technicznych.

## I. Z a s a d y   s t a t y k i

Wykład statyki oprzemy na sześciu pewnikach. Te pewniki nazywamy p r a w a m i   s t a t y k i. Przyjmiemy następujące prawa:

P i e r w s z e   p r a w o: "p r a w o   b e z w ł a d n o ś c i". "Bryła swobodna, znajdująca się w stanie spoczynku trwa nadal w tym stanie, a bryła swobodna,

poruszająca się ruchem postępowym trwa w stanie ruchu prostolinijnego i jednostajnego".

Czynniki takiego stanu bryły, który nie wynika z prawa bezwładności, to znaczy kiedy bryła, znajdująca się w stanie spoczynku, przechodzi w ruch, albo kiedy bryła nie porusza się ruchem prostolinijnym i jednostajnym, nazywamy s i ł a m i. Siły mogą być różnych rodzajów w w zależności od ich pochodzenia, np. siła ciężkości, siła sprężystości, siła ciśnienia jednego ciała na drugie, siły oporowe środowiska, wreszcie siły elektryczne i magnetyczne.

Siły, których działanie wywołuje ruch ciała, nazywamy siłami ~~czynnymi~~ c z y n n y m i, siły zaś, których działanie może tylko powstrzymać lub też zmienić r ruch ciała wywołany przez siły czynne, nazywamy siłami b i e r n y m i. Jako przykład siły biernej, może służyć siła tarcia, siła podporowa, i t,p.

Siły mogą działać na bryłę i wtedy, gdy bryła znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego i prostolinijnego; o takich siłach mówimy, że są w r ó w n o w a d z e , lub w z a j e m n i e s i ę z n o s z ą.

Każdej sile przypisujemy następujące trzy własności:

p u n k t z a c z e p i e n i a,
k i e r u n e k i
l i c z e b n ą w a r t o ś ć.

Te trzy własności siły nazywamy z n a m i o n a m i s i ł y.

Punkt zaczepienia siły, jest to ten punkt bryły materialnej, na który bezpośrednio działa siła.

Kierunek siły jest to kierunek tego prostolinijnego ruchu, który bryła materialna otrzymuje pod wpływem siły.

Linię prostą, wzdłuż której w tę czy inną stronę jest skierowana siła, nazywamy p r o s t ą d z i a ł a n i a s i ł y.

Ścisłe określenie wartości liczebnej siły otrzymamy, wprowadzając pojęcie o siłach równych i wielokrotnych, które nam daje drugie prawo statyki.

D r u g i e p r a w o. "Bryła swobodna, pod wpływem dwóch sił na nią działających, znajduje się w stanie równowagi tylko wtedy, kiedy siły te są sobie równe co do liczebnej wartości i skierowane wzdłuż jednej i tej samej prostej w przeciwne strony"

Z tego prawa wynika, że jeżeli bryła swobodna pod wpływem dwoch sił, działających wzdłuż jednej i tej samej prostej w przeciwne strony, zostaje w równowadze, to te siły są sobie równe.

Stąd wnioskujemy, skoro jedna siła będzie "K" razy większa od drugiej, to dla zrównoważenia jej, musimy w kierunku przeciwnym przyłożyć do bryły "K" sił, równych drugiej sile.

Jako jednostkę mierzenia siły, możemy wziąć dowolną siłę np. ciężar 1 kg. /jednego kilograma/ w określonym miejscu na powierzchni ziemi.

Przyrządy, za pomocą których robimy pomiary sił, nazywają się siłomierzami /dynamometrami/. Mierzyć siły możemy np. siłomierzem Ponceleta albo Regnaulta, albo wagą sprężynową.

Siłę przedstawiamy zwykle geometrycznie; jeżeli umówimy się przedstawiać jednostkę wartości siły, jako dowolnie obrany odcinek prostej "a b", to wielkość siły, zawierającej "K" jednostek możemy przedstawić odcinkiem "AB" takim, że $\frac{AB}{ab} = K$ /rys. 3/.

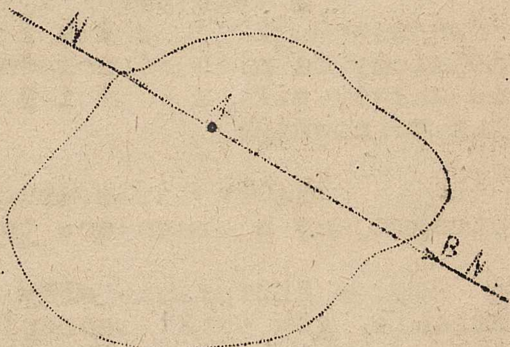



Rys. 3.

Niech A /rys. 4/ oznacza punkt zaczepienia siły na bryłę; MN - prostą działania tej siły. Odłóżmy wzdłuż prostej MN w kierunku działania siły odcinek AB = K.ab. Odcinek prostej AB przedstawi wtedy siłę g e o m e t r y c z n i e.

W geometrii odcinek prostej, mający określoną wartość liczebną i określony kierunek nazywamy wektorem. Mówimy, że dwa wektory są sobie równe, co do wielkości i kierunku jeżeli mają jednakową długość, są do siebie równoległe i skierowane w jedną i tę samą stronę.

Ponieważ siły przedstawia się w podobny sposób za pomocą odcinka prostej, możemy więc powiedzieć, że z geometrycznego




Rys. 4.

punktu widzenia ~~siła jestxwekxxm~~ *siła jest wektorem*. Często oznaczamy siłę jedną literą, np. $\overline{S}$ albo symbolem $\overline{AB}$; mówimy wtedy, że mamy siłę $\overline{S}$, albo siłę $\overline{AB}$. Kreska służy dla odróżnienia siły - wektora od liczebnej wartości siły, przedstawionej za pomocą odcinka $\overline{AB}$.

Gdy mamy pewną ilość sił, działających na bryłę materialną, to mówimy, że mamy ~~układ~~ *układ sił*.

Dwa układy sił nazywamy równoważnymi, jeżeli każdy z nich z osobna może być zrównoważony za pomocą jednego i tego samego układu sił.

Jeżeli układ sił M jest równoważny układowi sił N, to mówimy, że układ M wywiera na bryłę materialną to samo działanie co i układ N. Wtedy możemy układ sił N zamienić przez układ sił M, ruch bowiem bryły od tego nie zmieni się.

W szczególnym wypadku układ sił może być równoważny układowi sił, składającemu się tylko z jednej siły; tę siłę nazywamy *wypadkową układu sił*; poszczególne zaś siły układu względem wypadkowej - *siłami składowymi układu*.

Operację, przy pomocy której wyznaczamy wypadkową danego układu sił, nazywamy - "*składaniem sił*", operację odwrotną, za pomocą której dla danej siły /wypadkowej/ wyznaczamy równoważny jej układ sił, nazywamy *rozkładaniem siły*.

Oczywiście, że układ sił, znajdujący się w równowadze, jest równoważny zeru; wypadkowa takiego układu jest zero.

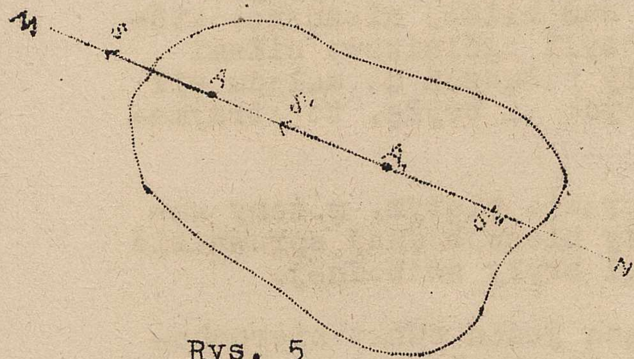
*Trzecie prawo*. "Działanie układu sił na bryłę materialną nie ulegnie zmianie, jeżeli dołączymy lub odejmiemy od niego układ sił, znajdujący się w równowadze".

Z tego prawa wynika natychmiast, jeżeli mamy dwa równoważne układy sił M i N, to gdy dodamy do nich lub odejmiemy od nich równoważne układy ~~M~~ M' i N', to otrzymane układy sił M + M' i N + N', lub M - M' i N - N' będą też równoważne.

Na zasadzie drugiego i trzeciego prawa statyki otrzymujemy następujące <u>twierdzenie</u>:

"Działanie siły na bryłę materialną nie ulegnie zmianie, gdy punkt zaczepienia siły przesuniemy w inny dowolny punkt bryły, albo też w punkt sztywno z bryłą zwią-

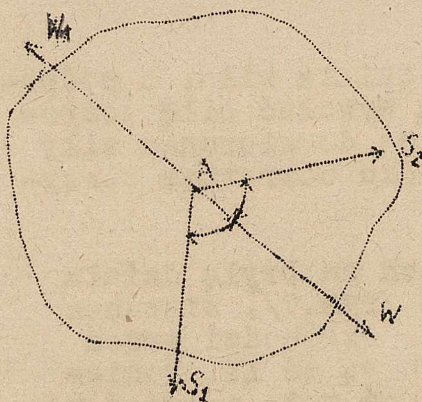
zany, pod jednym warunkiem, aby punkt ten leżał na prostej działania siły."



Rys. 5

Dowód tego twierdzenia jest zupełnie jasny /rys.5/ Na punkt A bryły materialnej działa siła S, wzdłuż prostej MN, która jest jej prostą działania. Do punktu A', leżącego na prostej MN przykładamy dwie siły S' i S" równe sile S, lecz skierowane odwrotnie wzdłuż prostej MN. Na zasadzie drugiego prawa siły S i S" odrzucamy jako wzajemnie równoważące się, pozostaje nam wtedy siła S', równoważna S.

C z w a r t e   p r a w o. "Wypadkowa dwóch sił, działających na jeden i ten sam punkt, równych co do liczebnej wartości i nachylonych pod pewnym kątem /nie $0^{\circ}$ i nie $180^{\circ}$/, jest skierowana po dwusiecznej tego kąta". / rys. 6/.



Rys. 6.

Siły $S_1$ i $S_2$ są sobie równe co do wartości liczebnej, ich wypadkowa jest skierowana wzdłuż dwusiecznej kąta pomiędzy siłami $S_1$ i $S_2$. Siły $S_1$ i $S_2$ mogą być zrównoważone siłą $W_1$, która co do wartości równa się sile W, działającej również na punkt A lecz przeciwnie skierowanej.

Odwrotnie, siła W może być rozłożona na dwie siły $S_1$ i $S_2$ równe sobie co do wartości i działające na punkt A wzdłuż prostych pochylonych do niej pod jednym i tym samym kątem, nie większym od prostego /$90^{\circ}$/. Co zaś się tyczy liczebnej wartości wypadkowej W, to jej na razie nie znamy.

P i ą t e   p r a w o. "Bryłę nieswobodną możemy uczynić swobodną, dołączając do układu sił czynnych, działających na bryłę, pewne nowe siły; te nowe siły nazywamy s i ł a m i   p o d p o r o w y m i czyli s i ł a m i   p o ł ą c z e ń."

Jeżeli np. mamy bryłę nieswobodną, to bryła ta pod działaniem danych sił czynnych nie może zająć położenia, jakie przyjęłaby pod działaniem tych samych sił, będąc swobodną. Czynniki, krępujące swobodę bryły, są to podpory i połączenia.

Prawo piąte przyjmuje, że w miejscach podpór i połączeń działają jakieś siły, nam bliżej nieznane, które nazywamy siłami podporowymi, czyli ogólnikowo siłami połączeń. Jeżeli dołączymy te siły połączeń do układu sił czynnych , nam znanych, działających na bryłę, to otrzymamy bryłę swobodną.

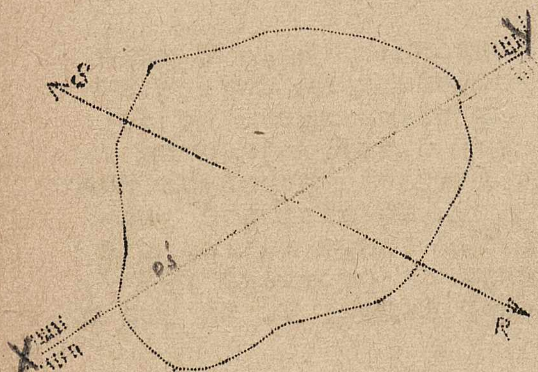
Opierając się więc na prawie piątym, możemy każde zagadnienie o równowadze bryły nieswobodnej sprowadzić do odnośnego zagadnienia równowagi bryły swobodnej.

Jeżeli mamy bryłę, mającą jeden punkt nieruchomy, to ten punkt będzie właśnie podporą, krępującą ruchy bryły. Siła podporowa w tym wypadku będzie siłą, której prosta działania przechodzi przez nieruchomy punkt bryły.

Jeżeli bryła ma nieruchomą oś, dookoła której może się ona obracać, to siłami podporowymi będą te siły, których proste działania przecinają oś bryły.

Kiedy mamy bryłę, opierającą się w jednym albo w kilku punktach o gładką płaszczyznę, to siłami podporowymi będą siły, działające na bryłę w punktach podparcia i skierowane prostopadle do płaszczyzny w stronę bryły.

Kiedy na bryłę nieswobodną działa siła, a podpory czyli połączenia są takie, że mogą wywołać siłę podporową równą co do wartości i odwrotną co do kierunku siły czynnej, to nastąpi równowaga. W wypadku odwrotnym otrzymamy ruch bryły.




Rys. 7.

Niech na bryłę działa siła S /rys.7/, kierunek której przechodzi przez nieruchomą oś XY. Ponieważ ta oś może wywrzeć na bryłę siłę podporową równą co do wartości i odwrotnie skierowaną R, to nastąpi równowaga.

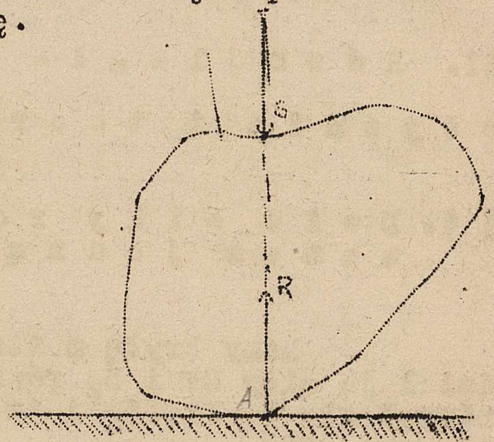
Na /rys. 8/ bryłę działa siła S, kierunek której przechodzi przez punkt podparcia A, prostopadle do powierzchni podparcia bryły. Ponieważ powierzchnia podparcia może wywołać siłę podporową R równą co do wartości liczebnej i przeciwnie skierowaną, to mamy znowu równowagę.

S z ó s t e p r a w o.
/trzecie prawo Newtona/. "Każdemu działaniu odpowiada równe co do wartości

łą podporową R równą co do wartości liczebnej i przeciwnie skierowaną, to mamy znowu równowagę.

Szóste prawo. /trzecie prawo Newtona/. "Każdemu działaniu odpowiada równe co do wartości, lecz odwrotnie skierowane przeciwdziałanie".

Na zasadzie dwóch ostatnich praw statyki wnioskujemy, że bryła nieswobodna wywiera na podporę czyli na połączenie równe i odwrotnie skierowane od siły podporowej działanie, czyli siły połączenia; to działanie nazywamy ciśnieniem bryły na podporę czyli na połączenia.




Rys. 8.

To prawo Newtona najdogodniej sformułować dla wypadku dwóch punktów materialnych: wzajemne działanie dwóch punktów materialnych A i B /rys. 9/ zawsze wyraża się przy pomocy dwóch sił S i S' równych co do wartości, lecz odwrotnie skierowanych wzdłuż prostej AB. Ponieważ zaś działanie wzajemne dwóch brył składa się z wzajemnych działań punktów materialnych te bryły tworzących, to, na mocy tego prawa, dwie bryły działają na siebie siłami zawsze równymi i odwrotnie skierowanymi.

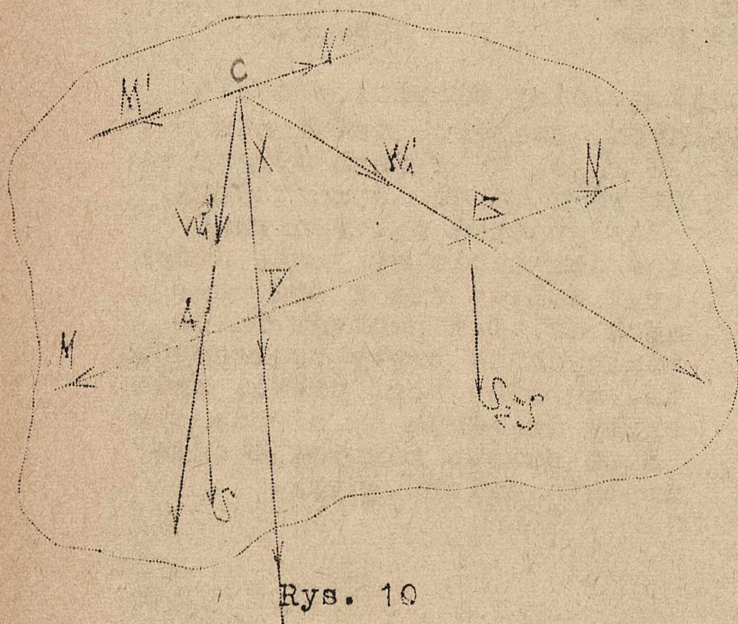



Rys. 9.

## II. Równoległe siły na płaszczyźnie i teoria par sił.

### § 1. Dwie siły równoległe skierowane w jedną stronę.

Mamy bryłę materialną, na której punkty A i B działają siły $S_1$ i $S_2$ równe co do liczebnej wartości, równoległe do siebie i tworzące dowolne kąty z prostą AB /rys. 10/.




Rys. 10

Wyznaczymy liczebną wartość, prostą działania i punkt zaczepienia ich wypadkowej.

Przyłóżmy do punktu A bryły materialnej siłę M, a do punktu B siłę N, które są równe sile $S_1 = S_2 = S$. Te siły równoważą się wzajemni, ponieważ działają wzdłuż jednej prostej. Na mocy czwartego prawa statyki, wypadkowa $W_1$ sił M i $S_1$ działa w kierunku dwusiecznej kąta pomiędzy siłami M i $S_1$; analogicznie wypadkowa $W_2$ sił N i $S_2$ jest skierowana wzdłuż dwusiecznej kąta pomiędzy siłami N i $S_2$.

Na zasadzie twierdzenia, wynikającego z drugiego i trzeciego prawa, możemy przesunąć te siły $W_1$ i $W_2$ wzdłuż ich prostych działania do punktu C, będącego punktem ich wzajemnego przecięcia się. Otrzymamy wtedy siły $W'_1$ i $W'_2$. Przeprowadzimy przez punkt C prostą /CD/ równoległą do kierunku sił $S_1$ i $S_2$; ta prosta w przecięciu się z prostą /AB/ da nam punkt D. Ponieważ kąt /M,A,W,/ jest równy kątowi /S,A,W/, to kąty /A,C,D/ i /C,A,D/ są też sobie równe, więc trójkąt ACD jest równoramienny i boki jego AD i CD są równe. Analogicznie otrzymamy, że trójkąt BCD jest też równoramienny i boki jego CD i BD są sobie równe. Mamy wtedy, że:

$$\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BD};$$

punkt D jest więc środkiem odcinka AB.

Siła $W'_1$ równa się sile może być rozłożona na dwie siły: M' równoległą i równą sile M, i siłę równą i równoległą do S, skierowaną wzdłuż prostej CD. Podobnie możemy rozłożyć siłę $W'_2$ na siłę: N' równą i równoległą do N i siłę równą i równoległą do $S_2$, skierowaną też wzdłuż prostej CD. Ale siły M' i N' na zasadzie drugiego prawa wzajemnie się równoważą, a siły działające wzdłuż prostej CD tworzą jedną siłę równą ich sumie, to znaczy zmieniającą się na siłę $S_1 + S_2 = 2S_2 = 2S$.

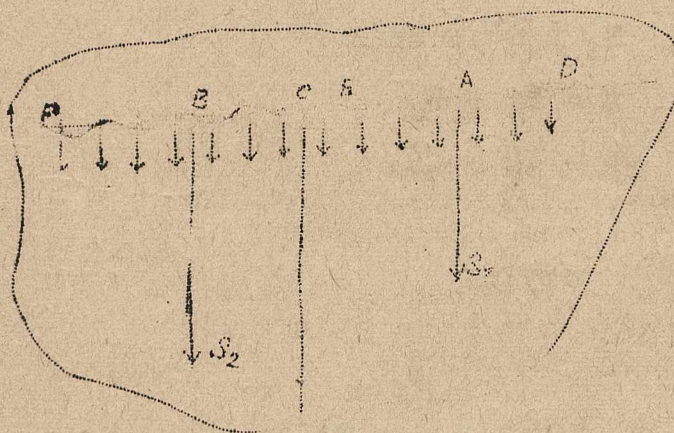
Mamy więc, że wypadkowa dwóch sił równoległych $S_1$ i $S_2$ równych S, równa się co do wartości 2S, jest do nich równoległa i działa na dowolny punkt prostej CD. Siła W równoważąca te siły $S_1$ i $S_2$ równa się 2S co do liczebnej wartości, jest skierowaną od C do D, a za punkt zaczepienia może być obrany dowolny punkt bryły materialnej, znajdujący się na prostej CD. Mamy więc następujące twierdzenie:

"Jeżeli mamy dwie sobie równe i równoległe siły działające na dwa punkty ~~materialne~~ bryły materialnej, to wypadkowa tych sił dzieli na połowę odcinek pomiędzy tymi punktami, jest ona równoległa i dwa razy większa co do liczebnej wartości od sił składowych".

Uogólnimy teraz nasze twierdzenie na wypadek dwu sił sobie nierównych i działających na dwa punkty bryły materialnej.

Niech siła $S_1$ działa na punkt A i siła $S^2$ na punkt B bryły materialnej.
Siły $S_1$ i $S_2$ są do siebie równoległe /rys. 11/. Przypuśćmy z początku, że wartości liczebne sił $S_1$ i $S_2$ są współmierne, to znaczy, że stosunek wartości $S_1$ i $S_2$ jest równy stosunkowi dwu liczb całkowitych $k_1$ i $k_2$;

$$AE : EB = S_1 : S_2 = k_1 : k_2.$$




Rys. 11.

Na przedłużeniach odcinka AB odkładamy odcinki: $\overline{AD} = \overline{AE}$ i $\overline{BF} = \overline{BE}$. Podzielimy odcinek $\overline{DE}$ na 2 $k_1$ równych części, a odcinek $\overline{EF}$ na 2 $k_2$ równych części. Ponieważ $\overline{DE} = \overline{EA} + \overline{AD} = \overline{EA} + \overline{AE} = 2\overline{AE}$ i $\overline{EF} = \overline{FB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{BE} = 2\overline{BE}$ i jak powiedzieliśmy: $\overline{AE} : \overline{BE} = k_1 : k_2$, więc $\overline{DE} : \overline{EF} = 2k_1 : 2k_2$, co oznacza, że w ten sposób cały odcinek $\overline{DF}$ podzielony został na $2/k_1 + k_2/$ równych części.

Na zasadzie wyżej udowodnionego twierdzenia możemy siłę $S_1$, działającą na punkt A bryły materialnej rozłożyć na $2k_1$ sił działających na środki $2k_1$ odcinków odcinka $\overline{DE}$, równych $S_1 : 2k_1$ co do liczebnej wartości i równoległych do siły $S_1$.

Analogicznie zastąpimy siłę $S_2$, działającą na punkt B bryły materialnej przez $2k_2$ równych sobie sił, mających liczebne wartości równe $S_2$, równoległych do siły $\frac{S_2}{2k_2}$ i działających na środki $2k_2$ odcinków odcinka $\overline{EF}$. Wszystkie w ten sposób otrzymane siły są równoległe do sił $S_1$ i $S_2$, mają liczebną wartość $S_1 : 2k_2 = S_2 : 2k_2$ i działają na punkty odcinka $\overline{DF}$ jednakowo od siebie odległe.

Układ tych sił możemy zastąpić przez ich wypadkową W, której liczebna wartość jest

$$W = 2k_1 \frac{S_1}{2k_1} + 2k_2 \frac{S_2}{2k_2} = S_1 + S_2$$

i która działa na środek odcinka $\overline{DF}$, leżący w punkcie C. Ponieważ:

$$\overline{DF} = \overline{FB} + \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BE} + \overline{AB} + \overline{EA} = \overline{AB} + \overline{AB} = 2\overline{AB}$$

$$\overline{FC} = \overline{CD} = \frac{\overline{DF}}{2} = \overline{AB}$$

zatem:

$$\overline{AC} = \overline{DC} - \overline{DA} = \overline{AB} - \overline{AE} = \overline{BE}$$
$$\overline{BC} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AB} - \overline{be} = \overline{AE}$$

czyli:

$$\overline{AC} = \overline{BE}, \qquad \overline{BC} = \overline{AE}$$

wobec tego

$$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{DE} : \overline{AE} = k_2 : k_1 = S_2 : S_1$$

ostatecznie mamy, że:

"Wypadkowa W dwóch równoległych sobie sił $S_1$ i $S_2$ **równa** się $S_1 + S_2$, co do liczebnej wartości, jest równoległa do sił składowych i dzieli odcinek $\overline{AB}$ w punkcie C w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do liczebnych wartości sił składowych".

Mamy więc zależność: $S_1 \cdot \overline{AC} = S_2 \cdot \overline{CB}$

ale

$$W = S_1 + S_2$$
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB},$$

więc ostatecznie otrzymamy, że:

$$\frac{S_1}{\overline{CB}} = \frac{S_2}{\overline{AC}} = \frac{W}{\overline{AB}}$$ czyli:

$S_1$ . $S^2$ $S_1 : S_2 : W = \overline{CB} : \overline{AC} : \overline{AB}$

Jeżeli liczebne wartości sił składowych $S_1$ i $S_2$ nie są współmierne, to i wtedy punkt zaczepienia ich wypadkowej będzie znajdować się na odcinku prostej AB w takim miejscu, że $S_1 . \overline{AC} = S_2 . \overline{CB}$.

Aby uogólnić nasze twierdzenie na wypadek sił niewspółmiernych, zauważymy, że gdy wypadkową sił $S_1$ i $S_2$ ma swój punkt zaczepienia w punkcie C, to punkt zaczepienia wypadkowej sił $S_1$ i $/S_2 + 1/$ będzie leżał bliżej punktu B niż punkt C, ponieważ $/S_2 + 1/$ jest większe od $S_2$.

Przypuśćmy teraz, że liczebne wartości sił $S_1$ i $S_2$, działających na bryłę materialną /rys. 12/ są niewspółmierne i że na odcinku AB mamy taki punkt C, który spełnia warunek: $S_1 : S_2 = \overline{CB} : \overline{AC}$.

Ponieważ liczebne wartosci sił $S_1$ i $S_2$ są niewspółmierne, zachodzi wątpliwość, czy prosta działania wypadkowej tych dwu sił przetnie odcinek AB w punkcie C, czy też nie.

Rys. 12.

Jeżeli prosta działania wypadkowej nie przechodzi przez punkt C, to musi ona przejść przez jakiś inny punkt tego odcinka AB; niech to będzie np. punkt D. Podzielimy odcinek $\overline{AB}$ na równe części, mniejsze od długości odcinka $\overline{DC}$; wtedy conajmniej jeden punkt podziału będzie się znajdować pomiędzy punktami D i C, niech to będzie np. punkt E.

Otrzymane w ten sposób odcinki $\overline{AE}$ i $\overline{BE}$ są współmierne i punkt E jest punktem zaczepienia wypadkowej dwu sił: siły $S_1$, działającej na punkt A, i jakiejś drugiej siły Q, działającej na punkt B, której wartość liczebna spełnia warunek: $S_1 : Q = \overline{EB} : \overline{AE}$. Ale AE jest mniejsza od $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ jest większe od $\overline{CB}$, więc stosunek $S_1 : Q$ jest większy od stokunku $S_1 : S_2$ i dlatego Q jest mniejsze od $S_2$. Wobec tego na zasadzie powyżej uczynionej uwagi, punkt zaczepienia wypadkowej sił $S_1$ i $S_2$ musi być bliżej punktu B niż punkt E i nie dalej od niego /B/ niż punkt D. Stąd wnioskujemy, że punkt zaczepienia wypadkowej nie może się znajdować na lewo od punktu C.

Analogicznie udowodnimy że punkt zaczepienia wypadkowej sił $S_1$ i $S_2$ nie może się znajdować na prawo od punktu C.

Otrzymamy więc ostatecznie, że i w wypadku niewspółmiernych sił $S_1$ i $S_2$ punkt C, spełniający warunek: $S_1 : S_2 = \overline{CB} : \overline{AC}$ jest właśnie tym punktem odcinka AB prostej, przez który przechodzi prosta działania wypadkowej tych sił.

Siła W' równa sile W co do liczebnej wartości, lecz skierowana w kierunku przeciwnym i działające wzdłuż tej samej prostej, przechodzącej przez C, równoważy siły $S_1$ i $S_2$.

Posługując się wyżej otrzymanymi wzorami: $S_1 : S_2 : W = \overline{CB} : \overline{AC} : \overline{AB}$, $W = S_1 + S_2$, możemy z łatwością rozłożyć daną siłę W na dwie składowe, do niej równoległe i jednakowo skierowane: 1/. kiedy są dane, wartość liczebna i punkt zaczepienia jednej składowej, 2/. kiedy są dane punkty zaczepienia składowych, znajdujących się po obu stronach od danej siły.

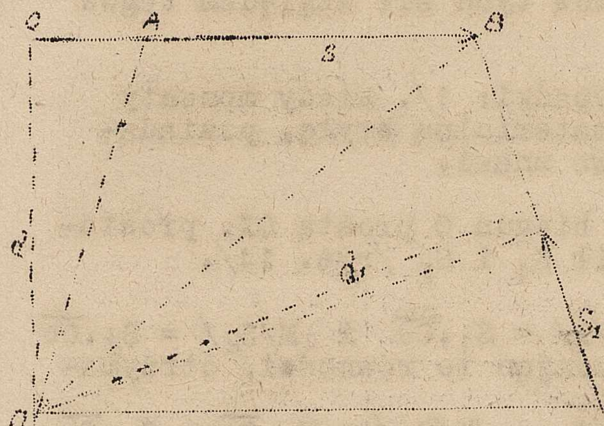
Każdy punkt, znajdujący się na prostej działania wypadkowej W, może być obrany za punkt jej zaczepienia, na zasadzie trzeciego prawa statyki. Ale wśród niezliczonej ilości tych punktów istnieje jeden punkt, mianowicie punkt C, znajdujący się na odcinku $\overline{AB}$ prostej, łączącej ~~xxxxxxxxxx~~ punkty zaczepienia sił składowych, który posiada następującą własność: gdy będziemy zmieniali wspólny kierunek sił składowych $S_1$ i $S_2$ o jeden i ten sam kąt w jedną i tę samą stronę, to punkt C zachowa swe położenie, a wypadkowa W będzie się obracała dookoła niego o jeden i ten sam kąt. Ten punkt C nazywamy **środkiem sił równoległych** $S_1$ i $S_2$.

Obierzmy na płaszczyźnie dwie wzajemnie prostopadłe osie współrzędnych OX i OY. Oznaczmy przez $/x_1, y_1/$ współrzędne punktu A, a przez $/x_2, y_2/$ punktu B. Ponieważ punkt C dzieli odcinek AB prostej w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do liczebnej wartości sił $S_1$ i $S_2$, to posługując się wzorami geometrii analitycznej do wyznaczania współrzędnych punktu, dzielącego dany odcinek prostej w danym stosunku i leżącego pomiędzy końcami tego odcinka, otrzymamy dla **współrzędnych punktu** C $/x_s, y_s/$ następujące wzory:

$$x_s = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S_1 + S_2} \qquad y_s = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S_1 + S_2}$$

Wprowadzimy teraz pojęcie o **statycznym momencie siły**. Wyobraźmy sobie na płaszczyźnie pewną siłę, przedstawioną za pomocą wektora $S = \overline{AB}$ i dowolny punkt O leżący na tej płaszczyźnie /rys. 13/.

Nazywamy wtedy m o m e n t e m s t a t y c z n y m d a n e j s i ł y w z g l ę d e m o b r a n e g o p u n k t u i l o c z y n l i c z e b n e j w a r t o ś c i s i ł y i o d l e g ł o ś c i o b r a n e g o p u n k t u o d p r o s t e j d z i a ł a n i a s i ł y, w z i ę t y z e z n a k i e m + l u b -.




Rys. 13.

Zwykle opuszczamy słowo "statyczny" i mówimy prosto moment siły S względem punktu O. Moment siły S względem punktu O będziemy oznaczali w następujący sposób: M/S/, a więc możemy napisać równanie: M/S/ = ± /S.d/ = ± /S.OC/. Jeżeli połączymy początek A i koniec B siły S prostymi z punktem O, to otrzymamy trójkąt AOB, którego podwójne pole równe jest iloczynowi /S.d/, to znaczy momentowi siły S względem punktu O ze znakiem "+" lub "-".

Obrany punkt O, względem którego bierzemy moment siły, nazywamy "b i e g u n e m m o m e n t u".

Iloczynowi, wyrażającemu moment, przypisujemy znak + /moment dodatni/, kiedy patrzący, znajdujący się w biegunie momentu na płaszczyźnie, zawierającej ten biegun i siłę, widzi siłę skierowaną od strony lewej ku prawej; jeżeli zaś patrzący widzi siłę skierowaną os strony ~~xxxxxxxxxxxxx~~ prawej ku lewej, to bierzemy moment siły ze znakiem - /moment ujemny/. W pierwszym wypadku płaszczyzna zawierająca biegun i siłę, będzie się obracała pod działaniem siły dookoła tego bieguna, zgodnie ze wskazówką zegara, umieszczonego na wymienionej płaszczyźnie i obróconego tarczą do patrzącego; w wypadku drugim będzie się obracała w stronę przeciwną wskazówki zegara, analogicznie umieszczonego. Mamy M/S/ = S.d, a $M/S_1/ = -S_1 \cdot d_1$ /rys. 13/.

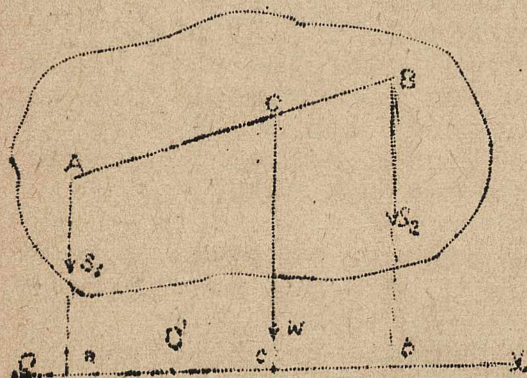
Otrzymaliśmy więc, że moment siły posiada liczebną wartość i znak. Jeżeli siłę bierzemy w kilogramach /kg/ a odległość bieguna od prostej działania siły w metrach /m/, to moment siły otrzymamy w kilogramometrach /kgm/.

Ponieważ bezwzględna wartość momentu zależy tylko od S i d, to: 1/. moment nie ulegni zmianie, jeżeli przesuniemy punkt zaczepienia siły wzdłuż prostej jej działania; 2/. moment siły jest jeden i ten sam względem każdego bieguna, leżącego na prostej, równoległej do prostej działania siły; 3/. moment siły równa się zeru względem każdego bieguna, obranego na prostej działania siły.

Udowodnimy teraz następujące prawo V a r i g n o n a: "Moment statyczny wypadkowej dwóch sił, wzajemnie równoległych i skierowanych w jedną stronę, względem dowolnegoż dowolnego bieguna, obranego na ich płaszczyźnie, równa się sumie algebraicznej momentów tych sił względem tegoż bieguna."

Rozróżnimy tu dwa wypadki: 1/. kiedy momenty sił $S_1$ i S2, działających na materialną bryłę, posiadają względem bieguna O jednakowe znaki.

Przeprowadźmy przez biegun O prostą OX, prostopadle do prostych działania sił $S_1$ i $S_2$ /rys. 14/. Będziemy wtedy mieli, że:



Rys.14

$M/S_1/ = S_1.\overline{Oa}$ i $M/S_2/ = S_2.\overline{Ob}$

Dodając te równości, otrzymamy:

$M/S_1/ + M/S_2/ = S_1.\overline{Oa} + S_2.\overline{Ob}$

Z rys. 14 wynika, że:

$\overline{Oa} = \overline{Oc} - \overline{ac}$

i $\overline{Ob} = \overline{Oc} + \overline{bc}$

Wstawimy otrzymane wyrażenia dla $\overline{Oa}$ i $\overline{Ob}$ w powyższe równanie, wtedy:

$M/S_1/ + M/S_2/ = S_1/\overline{Oc} - \overline{ac}/ + S_2/\overline{Oc} + \overline{bc}/ = \overline{Oc}/S_1 + S_2/ - S_1.\overline{ac} = S_2.\overline{bc}.$

Ponieważ zaś istnieją zależności:

$S_1.\overline{ac} = S_2.\overline{bc}$ i $W = S_1 + S_2$

TO OTRZYMUJEMY: ŻE:

$M/S_1/ + M/S_2/ = \overline{Oc}./S_1 + S_2/ = \overline{Oc}.W.$

Ale przecież $M/W/ = \overline{Oc}.W$, więc ostatecznie i

$M/S_1/ + M/S_2/ = M/W/$ c.b.d.o.

2/. Momenty sił $S_1$ i $S_2$ posiadają różne znaki względem obranego bieguna. Zrobimy punkt O' Zrobimy punkt O' /rys. 14/ biegunem. Postępujemy analogicznie, jak w poprzednim wypadku.

Mamy $M/S_1/ = -S_1.\overline{O'a}$; $M/S_2/ = S_2.\overline{O'b}$ skąd:

$M/S_1/ + M/S_2/ = -S_1.\overline{O'a} + S_2.\overline{O'b}.$

Z rysunku widzimy, że:

$\overline{O'a} = \overline{ac} - \overline{O'c}$, $\overline{O'b} = \overline{O'c} + \overline{bc}$

więc powyższe równanie przyjmuje postać:

$M/S_1/ + M/S_2/ = -S_1/\overline{ac} - \overline{O'c}/ + S_2/\overline{O'c} + \overline{bc}/ = \overline{O'c}/S_1 + S_2/ - S_1.\overline{ac} + S_2.\overline{bc} = \overline{O'c}/S_1 + S_2/ = \overline{O'c}.W;$

## § 2. Dowolna ilość sił wzajemnie równoległych, jednakowo skierowanych i znajdujących się na jednej płaszczyźnie.

Przypuśćmy, że mamy n sił, wzajemnie równoległych, skierowanych w jedną stronę i leżących na jednej płaszczyźnie: $S_1, S_2, S_3, \ldots S_i, S_{n-1}, S_n$

Posługując się prawidłem poprzedniego paragrafu, dla składania dwóch równoległych sił, wyznaczymy wypadkową dwóch sił $S_1$ i $S_2$; niech to będzie siła $W_1$. Następnie wyznaczymy wypadkową siły $W_1$ i np. siły $S_3$; niech to będzie siła $W_2$. Postępując w ten sposób dalej, przyjdziemy dziemy do następującego twierdzenia:

*Wypadkowa wielu sił wzajemnie równoległych, jednakowo skierowanych i znajdujących się na jednej płaszczyźnie, równa się ich sumie, co do liczebnej wartośui*

$$W = S_1 = S_2 + S_3 + \ldots + S_i + \ldots + S_{n-1} + S_n,$$

*jest do nich równoległa i jednakowo z nimi skierowana; prosta działania wypadkowej W przechodzi przez punkt S, współrzędne którego określone są wzorami:*

$$X_s = \frac{S_1 \cdot X_1 + S_2 \cdot X_2 + \ldots + S_{n-1} \cdot X_{n-1} + S_n \cdot X_n}{S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} + S_n}$$

$$Y_s = \frac{S_1 \cdot Y_1 + S_2 \cdot Y_2 + \ldots + S_{n-1} \cdot Y_{n-1} + S_n \cdot Y_n}{S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} + S_n}$$

przyczym $/X_1, Y_1/$, $/X_2, Y_2/$ ..../$X_{n-1}, Y_{n-1}/$ i $/X_n, Y_n/$ są współrzędnymi punktów zaczepienia, na bryle materialnej, sił składowych $/S_1, S_2 \ldots S_{n-1}, S_n/$.

Jeżeli mamy zmienimy kierunek prostych działania sił składowych $S_1, \ldots S_n$ o jeden i ten sam kąt, w jedną i tę samą stronę, nie zmieniając ich punktów zaczepienia, to prosta działania wypadkowej tych sił obróci się dookoła punktu $S/X_s, Y_s/$ o ten sam kąt w tę samą stronę. Punkt płaszczyzny $S/X_s, Y_s/$ posiadający tę

właściwość, nazywamy **środkiem układu sił równoległych.**

Stosując twierdzenie **Varignona**, udowodnione w poprzednim paragrafie, z początku do wypadkowej $W_1$, dwóch sił $S_1$ i $S_2$ następnie do wypadkowej $W_2$ siły $W_1$ i np. siły $S_3$ i postępując w ten sposób dalej otrzymamy uogólnione twierdzenie:

"**Moment statyczny, wypadkowej wielu sił, wzajemnie równoległych i skierowanych w jedną stronę, względem dowolnie obranego, na płaszczyźnie ich działania bieguna, równa się sumie algebraicznej momentów tych sił względem tegoż bieguna:**

$$M/W/ = M/S_1/ + M/S_2/ + \dots + M/S_{n-1}/ + M/S_n/.$$

## § 3. Dwie siły wzajemnie równoległe, nierówne sobie i skierowane w przeciwne strony.

Rozpatrzymy teraz zagadnienie o składaniu dwóch sił wzajemnie równoległych, nierównych sobie co do liczebnej wartości i skierowanych w przeciwne strony.

Przypuśćmy, że na punkt A bryły materialnej działa siła $S_1$, a na punkt B siła $S_2$ do niej równoległa, przeciwnie skierowana i taka, że $S_2 > S_1$ /rys. 15/. Przedłużmy prostą AB w kierunku od A do B i odłóżmy od B do C długość BC spełniającą warunek $AB : BC = W' : S_1$ przyczem $W' = S_2 - S_1$.

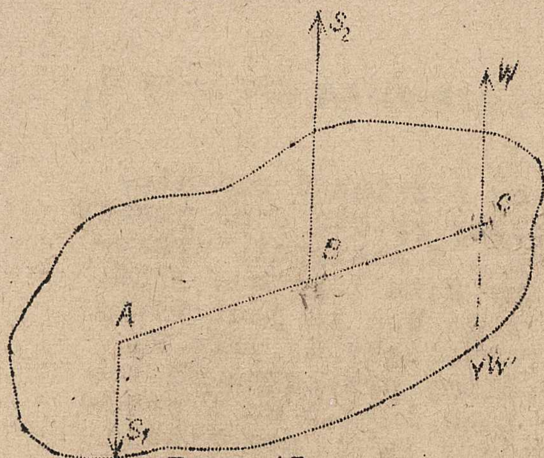
Napisana równość wyraża, że punkt B jest punktem zaczepienia wypadkowej dwóch wzajemnie równoległych i jednakowo skierowanych sił: siły $S_1$ działającej na punkt A i siły W', działającej na punkt C". Mamy więc na zasadzie §1., że siła $S_2$ działająca na punkt B równoważy siły $S_1$ i $W' = S_2 - S_1$, i że bryła materialna pod działaniem trzech sił $S_1$, W' i $S_2$ pozostaje w stanie równowagi.
I odwrotnie siły $S_1$ i $S_2$, działające na punkty A i B bryły materialnej, będą zrównoważone siłą $W' = S_2 - S_1$, to powyższa równość da się napisać następująco:

$$BC/S_2 - S_1/ = S_1/AC - BC/,$$

czyli:

$$BC.S_2 = AC.S_1 \text{ albo } S_2 : S_1 = AC : BC.$$

Ta ostatnia równość określa położenie punktu C.




Rys. 15.

Siła W, równa co do liczebnej wartości sile W', lecz przeciwnie do niej skierowana, jest więc wypadkową sił składowych $S_1$ i $S_2$.
Możemy wtedy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

"W y p a d k o w a W d w ó c h, n i e r ó w n y c h s o b i e w z a j e m n i e r ó w n o l e g ł y c h i s k i e r o w a n y c h w p r z e c i w n e s t r o n y, s i ł $S_1$ i $S_2$ r ó w n a s i ę i c h r ó ż n i c y, c o d o l i c z e b n e j w a r t o ś c i, j e s t d o n i c h r ó w n o l e g ł ą i s k i e r o w a n ą w s t r o n ę w i ę k s z e j s i ł y /rys. 15 - $S_2$/ s k ł a d o w e j w z d ł u ż p r o s t e j, d z i e l ą c e j p r z e d ł u ż e n i e o d c i n k a AB w s t r o n ę w i ę k s z e j z s i ł s k ł a d o w y c h /$S_2$/ w p u n k c i e C, w s t o s u n k u o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n y m d o l i c z e b n e j w a r t o ś c i s i ł:

$$S_1 : S_2 = BC : AC .$$

Posługując się wzorami:

$$W = S_2 - S_1 ; \quad S_1 \cdot AC = S_2 \cdot BC ; \quad S_1 : S_2 : W = BC : AC : AB ;$$

z łatwością rozłożymy daną siłę W na dwie siły składowe, wzajemnie równoległe i skierowane w przeciwne strony:

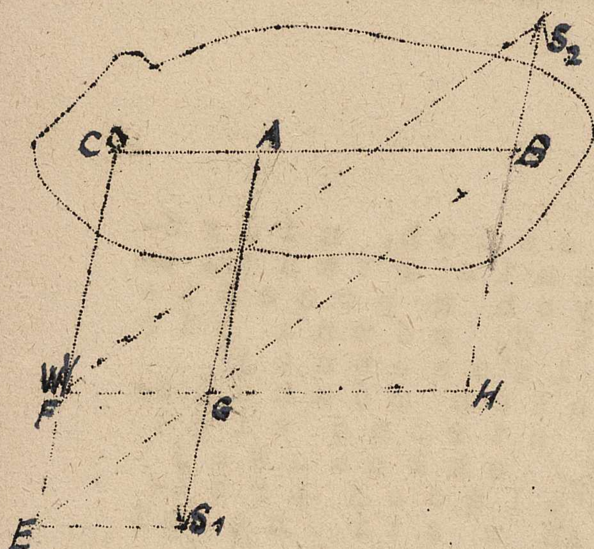
1/ kiedy jest zupełnie określona jedna składowa;

2/ kiedy są zadane punkty zaczepienia sił składowych, położone po jednej stronie od danej siły /rozkładanej/.

Rozłożenie możemy wyłonić i geometrycznie; dla przykładu, zrobimy je dla wypadku 2-go.

Mamy siłę W, działającą na punkt C bryły materialnej, chcemy ją rozłożyć na dwie siły $S_1$ i $S_2$ w ten sposób, aby siła $S_1$ działała na punkt A i była skierowana w tę samą stronę co i siła W, a siła $S_2$ działała na

punkt B i była skierowana w stronę przeciwną niż siły $S_1$ i W /rys. 16/.




Rys. 16.

Aby rozwiązać zadanie, łączymy prostą dane punkty A, B i C następnie wykreślamy równoległobok ABHG, którego bok AG jest równy i równoległy do siły W. Kreślimy przekątną BG tego równoległoboku i przedłużamy ją do przecięcia się z prostą działania siły rozkładanej W w punkcie E. Otrzymujemy wtedy, że CE = $S_1$ i FE = $S_2$ co do liczebnej wartości, ponieważ CE i FE, z podobieństwa trójkątów GAB, EFG i ECB czynią zadość proporcji

$$\frac{GA}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{CE}{CB}$$

która jest tą samą proporcją, której muszą czynić zadość wyznaczone siły, c.b.d.o.

Przyjmijmy płaszczyznę działania naszych sił za płaszczyznę współrzędnych XOY i oznaczmy przez $/x_1, y_1/$ współrzędne punktu A, a przez $/x_2, y_2/$ współrzędne punktu B. Ponieważ punkt C dzieli odległość AB na części odwrotnie proporcjonalne do liczebnych wartości sił $S_1$ i $S_2$ to, posługując się wzorami geometrii analitycznej dla współrzędnych punktu, dzielącego zewnętrznie dany odcinek w danym stosunku, otrzymamy dla współrzędnych $/x_s, y_s/$ punktu C następujące wzory:

$$x_s = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} \quad i \quad y_s = \frac{S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2}{S_1 - S_2}$$

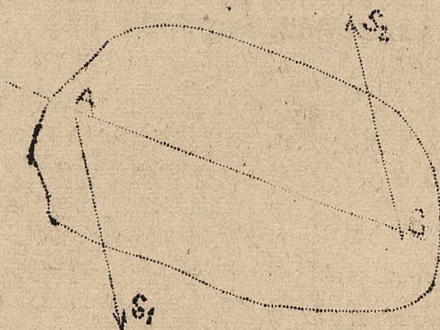
Punkt $C/x_s, y_s/$ nazywamy ~~środkiem~~ ś r o d k i e m r ó w n o l e g ł y c h s i ł $S_1$ i $S_2$. Jeżeli będziemy obracać siły składowe $S_1$ i $S_2$ DOOKOŁA ICH PUNKTÓW ZACZEPIENIA, zachowując ich wzajemną równoległość, to wypadkowa W tych sił będzie się obracała dookoła punktu C, pozostając równoległą do swych składowych.

Sposobem analogicznym do już zastosowanych w § 1 i 2, udowodnimy twierdzenie V a r i g n o n a, które

możemy tak wysłowić: moment statyczny wypadkowej dwóch sił, wzajemnie równoległych, nierównych sobie co do liczebnej wartości i skierowanych w przeciwne strony, względem dowolnego bieguna, obranego na ich płaszczyźnie, równa się algebraicznej sumie momentów tych sił względem tego bieguna.

Dowód opuszczamy ze względu na jego identyczność z dowodami poprzednimi.

Jeżeli na punkty A i B bryły materialnej działają sobie równe, wzajemnie równoległe, lecz przeciwnie skierowane siły $S_1$ i $S_2$, pod dowolnymi kątami do odcinka AB prostej, /tylko nierównymi 0° i 180°/ to zgodnie z wyżej powiedzianym, nie jesteśmy w stanie ich zrównoważyć jedną siłą /rys. 17/.



Rys. 17.

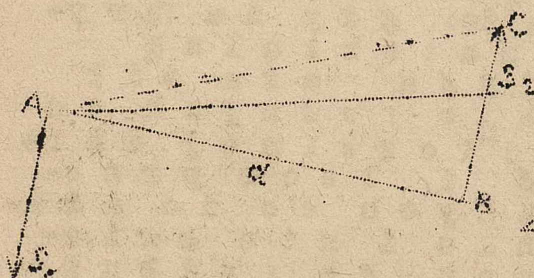
Rzeczywiście, wypadkowa tych sił musi równać się zeru, co do liczebnej wartości, a jej kierunek musi przeciąć przedłużenie odcinka prostej AB w punkcie nieskończenie odległym tak od punktu A, jak i od punktu B. Stąd wnioskujemy, że: gdy na bryłę materialną działa para sił sobie równych co do liczebnej wartości, lecz przeciwnych co do kierunku i nie skierowanych wzdłuż prostej, łączącej punkty ich zaczepienia, to jest niepodobieństwem zrównoważyć je jedną siłą.

## § 4. Teoria pary sił.

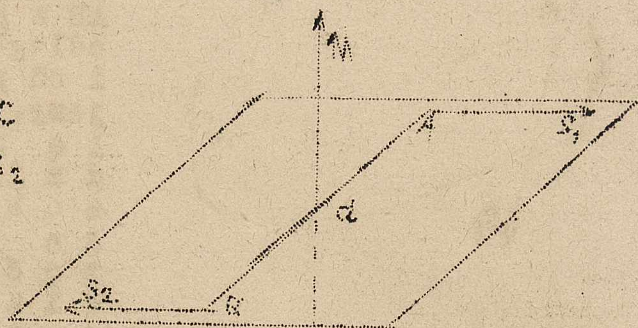
*Dwie siły wzajemnie równoległe, równe co do liczebnej wartości i mające kierunki przeciwne nazywamy parą sił.*

Ponieważ za punkt zaczepienia każdej z sił tworzących parę możemy wziąć dowolny pinkt, leżący na prostej działania siły, to zwykle obieramy punkt zaczepienia A i B /rys. 18/ w ten sposób, aby prosta AB, łącząca je, była prostopadła do prostych działania sił. Długość odcinka prostopadłej AB nazywamy *ramieniem pary*, a płaszczyznę, w której para się znajduje *płaszczyzną działania pary*. Parę zwykle oznaczamy symbolem $/S_1, S_2/$; Poinsot, który pierwszy wyprowadził teorię pary sił, oznaczył pary następująco $/S_1 - S_2/$.

Iloczyn wartości liczebnej jednej z sił tworzących parę i ramienia pary nazywamy *momentem statycznym pary sił*, względem dowolnego punktu jej płaszczyzny, np. moment pary sił $/S_1, S_2/$ jest to iloczyn $S \cdot d$, przyczym S oznacza wspólną liczebną wartość sił $S_1$ i $S_2$ a d jest to ramię pary sił /rys. 18/.




Rys. 18.




Rys. 19.

Moment pary może być dodatni i ujemny, w zależności od tego w jaką stronę para sił obraca swoje ramię. Gdy para sił obraca swoje ramię w kierunku zgodnym z obrotem wskazówki zegara, to moment nazywamy dodatnim /+/, a gdy w kierunku przeciwnym, to ujemnym /-/.

Jeżeli punkty A i C połączymy prostą, to zobaczymy z łatwością, że moment pary jest, co do wartości bezwzględnej, równy podwójnemu polu trójkąta ABC, a więc trójkąta posiadającego wierzchołek w punkcie zaczepienia jednej z sił pary i mającego drugą siłę jako podstawę.

Moment pary sił przedstawiamy zwykle geometrycznie, za pomocą pewnego wektora; aby otrzymać ten wektor wystawimy prostopadłą do płaszczyzny działania pary sił, na tej prostopadłej, nazwanej osią pary sił, odetniemy podług obranej skali liczebną wartość S.d.

Zwykle postępujemy następująco: przeprowadzamy oś pary sił przez środek ramienia pary sił i na tej osi odcinamy liczebną wartość momentu w tę stronę od płaszczyzny działania pary sił, aby patrzący z końca wektora na jego podstawę, widział ramię pary sił obracające się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegara. Dlatego też na rys. 19 moment musimy odciąć na osi pary nad płaszczyzną, a na rys. 20 pod płaszczyzną działania pary.

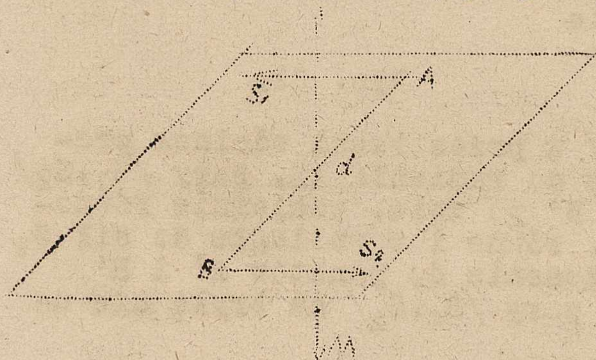
Moment pary jest to więc wektor M, wartość liczbowa którego jest S.d, prostą działania - oś pary, a kierunek zależy od kierunku obrotu ramienia pary dookoła osi pary.

Para sił, działająca na materialną bryłę nie może być zrównoważona jedną siłą; o tym było już powiedziane w końcu § 3-go. Ta własność par może być udowodniona zupełnie ściśle. Przytoczymy tu jeden ze sposobów dowodzenia.

I. Twierdzenie. Para sił nie posiada wypadkowej.

Przypuśćmy, że siły $S_1$ i $S_2$ nie są sobie równe, co do liczebnej wartości, i niech np. $S_2 > S_1$; wtedy składając je otrzymamy pewną wypadkową W, której liczbowa wartość jest $S_2 - S_1$ /rys. 21/, a punkt zaczepienia określa się za pomocą proporcji $W : S_1 = AB : BC$, czyli $W : S_1 = d : x$. Z tej proporcji otrzymujemy:

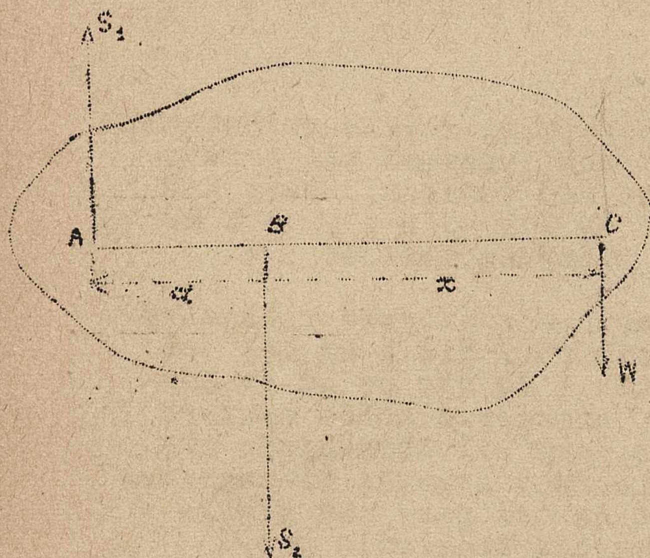
$$x = \frac{S_1 . d}{W} = \frac{S_1 . d}{S_2 - S_1}$$




Rys. 20.

Przypuśćmy teraz, że siły $S_1$ i $S_2$ przetworzą się w parę sił, to punkt zaczepienia ich wypadkowej przesunie się w nieskończoność i para sił wypadkowej nie posiada, c.b.d.o.

Jeżeli teraz przypuścimy, że wypadkowa W

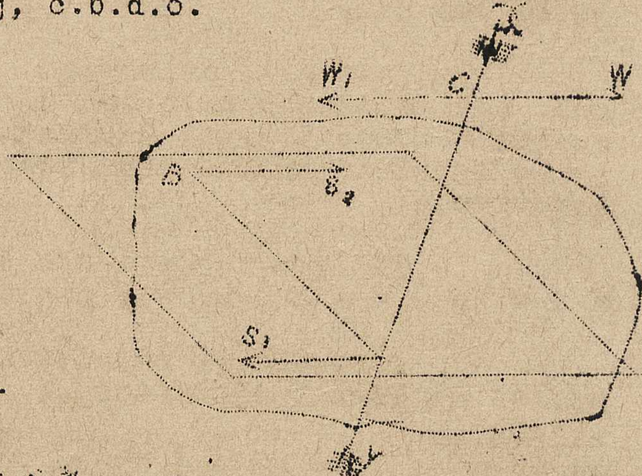



Rys. 21.

znajduje się poza płaszczyzną działania pary $/S_1, S_2/$, i leży gdzieś w przestrzeni /rys. 22/ to robiąc dwa punkty naszej bryły materialnej nieruchomymi, mianowicie jeden C, na prostej działania wypadkowej W, a drugi A, na prostej działania jednej z sił pary, zobaczymy, że dwie siły W i $S_1$, jako przecinające nieruchomą oś XCAY, przestaną wywierać działania na naszą bryłę, a trzecia siła $S_2$ będzie obracała bryłą dookoła osi XCAY, co być nie powinno i nie może przy obecności wypadkowej W. Para sił nie posiada więc wypadkowej, c.b.d.o.

Dwie pary, jako dwa układy sił, wywierające jednakowe działanie na bryłę materialną, nazywamy **równoważnymi parami sił.**

II. **Twierdzenie: Działanie pary sił na bryłę materialną nie ulegnie zmianie, gdy przesuniemy parę sił równolegle do siebie w przestrzeni.**

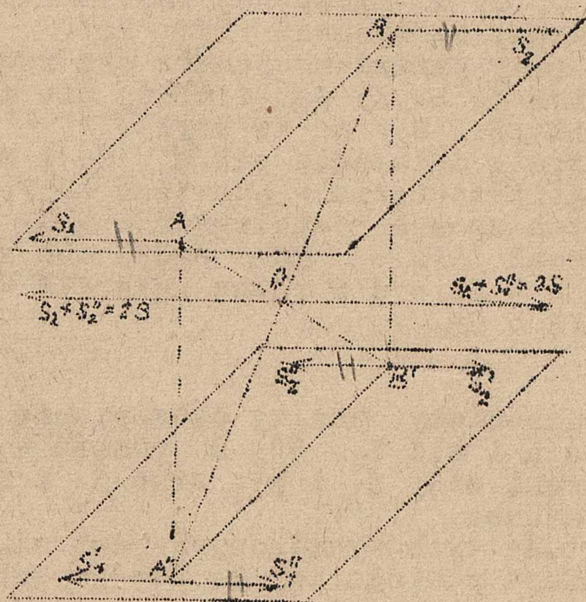



Rys. 22.

Weźmiemy /rys. 23/ w przestrzeni odcinek prostej A'B', równy i równoległy do ramienia AB, pary $/S_1, S_2/$ i przyłożymy w punktach A' i B' po dwie, wzajemnie równoważące, siły $S_1'$, $S_1''$ i $S_2'$, $S_2''$, równe i równoległe do sił $S_1$ i $S_2$. Oczywiście, że od przyłożenia do punktów A' i B' tych czterech sił, działanie pary $/S_1, S_2/$ na bryłę nie ulegnie zmianie.

Wykreślmy równoległobok ABA'B' i przeprowadzimy przekątne AB' i A'B. Składając siły $S_1$ i $S_2''$ otrzymamy wypadkową, równą co do liczebnej wartości 2S, przyczym S oznaczy wspólną liczbową wartość sił $S_1$ i $S_2$. Punkt zaczepienia tej wypadkowej będzie się znajdował w punkcie O

przecięcia się przekątnych AB' i A'B równoległoboku ABA'B'.




Rys. 23.

Składając następnie siły $S_1''$ i $S_2''$ otrzymamy wypadkową równą 2S, co do liczbowej wartości, i mającą punkt zaczepienia w punkcie O. Otrzymane w ten sposób dwie wypadkowe są sobie równe, co do liczbowej wartości, działają na ten sam punkt bryły materialnej O i są przeciwne co do kierunków; oczywiście, że te siły wzajemnie się równoważą. Pozostają wtedy dwie siły $S_1'$ i $S_2'$; te siły tworzą parę sił /$S_1'$, $S_2'$/, która jest równoważną z parą /$S_1$, $S_2$/, lecz tylko przesuniętą równolegle do niej w inne położenie, c.b.d.o.

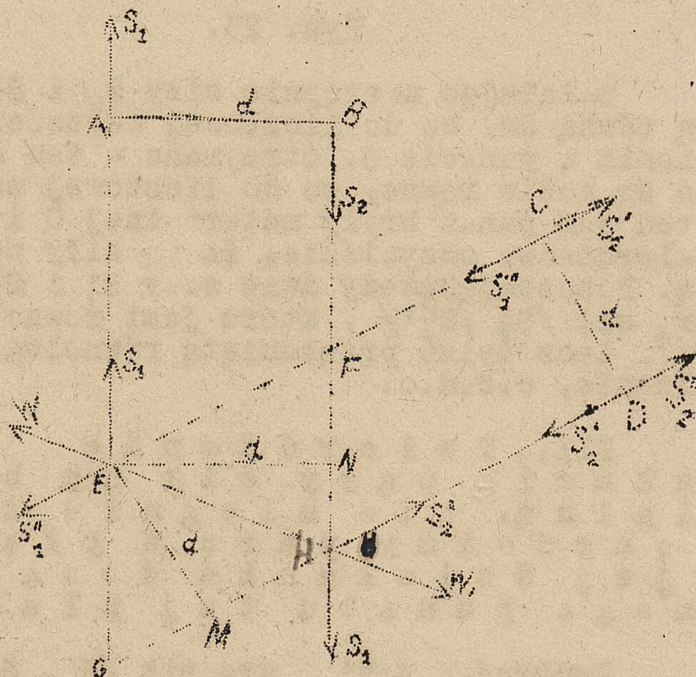
III. Twierdzenie:

Działanie pary sił na bryłę materialną, nie ulegnie zmianie, gdy obrócimy parę w płaszczyźnie jej działania dookoła dowolnego punktu tej płaszczyzny.

Wyobraźmy sobie parę sił /$S_1$, $S_2$/, ramię której AB = d; chcemy parę tę obrócić tak, aby ramię jej AB przyjęło położenie DC /rys. 24 na płaszczyźnie działania pary.

Przyłożymy do punktów C d i D siły $S_1'$, $S_1''$ i $S_2'$, $S_2''$ równe S, co do liczbowej wartości i skierowane w sposób wskazany na rysunku /rys. 24/.
Ponieważ te siły parami wzajemnie się równoważą, to przyłożenie ich do bryły materialnej nie zmieni działania pary sił /$S_1$, $S_2$/ na tę bryłę.
Przedłużmy proste działania sił $S_1$, $S_2$ i $S'_1$, $S'_2$, do ich wzajemnego przecięcia w punktach E, F, G, H, otrzymamy w ten sposób równoległobok EFGH będzie rombem, ponieważ EFN = EGM /gdyż oba trójkąty mają boki równe: EN = EM = d i równe kąty EFN = EGM /więc i EG = EF = FH = GH.

Przesuniemy punkty zaczepienia sił $S_1$ i $S''_1$ do punktu E i sił $S_2$, $S''_2$ do punktu H.
Składając parami siły $S_1$ i $S''_1$ oraz $S_2$ i $S''_2$, otrzymamy ich wypadkowe W i W'.
Liczbowa wartość tych wypadkowych jest nam nieznana; mo możemy natomiast powiedzieć, że one są sąbie równe co do liczbowej wartości




Rys. 24.

i wzajemnie równoległe, gdyż otrzymaliśmy je przez składanie wzajemnie równych i równoelgłych sił. Oprócz tego proste ich działania będą dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach E i H rombu na zasadzie czwartego prawa statyki (rozdaił I), ponieważ siły W i W' są otymane od składania równych $S_1, S_1'$ i $S_2$ i $S_2''$. Z drugiej strony widzimy, że przekątna rambu dzieli kąty w jego wierzchołkach na pół, więc siły $W_1$ i $W_1'$ jako dzielące kąty E i H na pół, będą skierowane wzdłuż przekątnej EH i dlatego będą się wzajemnie równoważyć.

Pozostają siły $S_1'$ i $S_2'$; te siły tworzą parę sił $/S_1'$ $S_2'/$ równoważną z parą sił $/S_1, S_2/$, c b.d.o.

Z ostatnich dwóch twierdzeń o parach sił wyciągamy następujący wniosek: *działanie pary sił na bryłę materialną nie ulegnie zmianie, gdy przeniesiemy ją w dowolne położenie, pod jednym warunkiem, że płaszczyzna działania pary sił w nowym położeniu będzie równoległa do początkowej płaszczyzny działania pary sił.*

Udowodnimy teraz nastepujące twierdzenie, z kolei czwarte, o parach sił:

IV. *Twierdzenie. Działanie pary sił na bryłę materialną nie ulegnie zmianie, gdy liczbową wartość sił, parę tworzących i ramię pary zmienimy w ten sposób, aby moment pary zachował swą wartość liczbową i znak.*

Weźm parę sił $/S_1, S_2/$ i zmieńmy ją w ten sposób, aby siły tworzące były $Q < S$, co do liczbowej wartości/rys.25/ Rozłożymy siłę $S_2$ na dwie siły równoległe i jednakowo skierowane Q i $/S_2 - Q/$. Przytem będzie zachodziła prpporcja:

$$Q_2 : /S_2 - Q/ : S_2 = AB : BC : AC$$

Następnie złożymy siły $S_1$ i $/S_2 - Q/$, działające na ten sam punkt A, otrzymamy ich wypadkową, której liczbowa wartosc jest:

$$S_1 - /S_2 - Q/ = S_1 - S_2 + Q = Q = Q_1$$

rys. 25

Mamy wtedy siłe $QQ_1$ działajaca na punkt A i skierowana do gory/rys.25/. Wzamian poczatkowej pary sil $/S_1,S_2/$ mamy nowa pare sił $/Q_1,Q_2/$. Wyzej napisana proporcja daje $S_2AB = Q_2AC$, przyczym $Q_2AC$ jest momentem pary $/Q_1,Q_2/$

Zmienilismy wiec liczbowa wartosc pary sił i jej ramie, pozostawiajac zarazem momenty par bez zmiany, przyczym dzaiłanie pary sił na bryłe materialna od tego nie uległo zmianie, c.b.d.o.

Na zasadzie ostatnich trzech twierdzen o parach sił otrzymujemy wniosek:

Działanie pary sił na materialna bryłe, nie ulegnie zmianie, gdy zastapimy ja druga para sił, znajdujaca sie w tej samej płaszczyznie albo w płaszczyznie do niej rownoległej, pod jednym warunkiem, ze nowa para bedzie obracała bryłe materialna w te sama strone i ze iloczyn z siły i ramienia pary pozostanie bez zmiany.

Te własnosc pary sił, jezeli przyjmiemy pod uwage to, co było powiedziane na poczatku tego paragrafu, o wektorowym przedstawieniu momentu M pary sił, mozemy krotko wyrazic: dwie pary sił sa rowne, jezeli ich momenty geometrycznie rowne. Niezmiennymi sa tylko nastepujace wartosci pary sił:

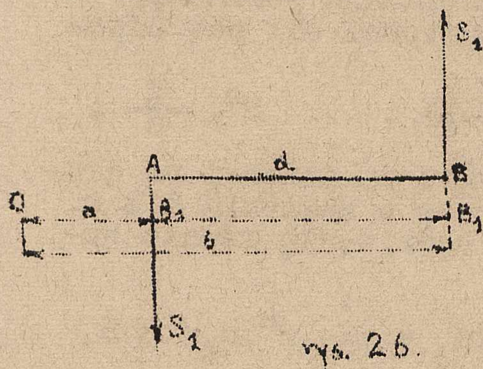
1. kierunek prostopadłej, wystawionej do płaszczyzny działania pary sił,
2. kierunek obrotu ramienia sił;
3. iloczyn siły przez ramie pary.

Wszystkie te trzy własnosci pary sa zawarte w momencie-wektorze pary sił. Mozemy wiec ostatecznie powiedziec, ze działanie pary sił na materialna bryłe w zupełnosci jest okreslone przez moment pary.

Udowodnimy teraz nastepujace twierdzenie Varignona o momencie pary sił:

V. Twierdzenie: Suma algebraiczna momentow sił, tworzacych

parę, względem dowolnego punktu płaszczyzny działania pary sił, rowna się momentowi pary sił.



rys. 26.

Niech będzie parą sił $/S_1, S_2/$ działającą na punkty A i B brył materialnej /rys 26/. Przyjmijmy punkt O, znajdujący się na płaszczyznie działania pary sił, za biegun, względem ktorego będziemy brać momenty sił. Przeprowadzimy przez biegum O prostą, prostopadle do prostych działania pary sił; ta prosta przetnie proste działania sił w punktach $A_1$ i $B_1$.

Oznaczając przez a odcinek $OA_1$ i przez b odcinek $OB_1$, wezmiemy momenty sił pary $/S_1, S_2/$ względem punktu O, wtedy:

$$M/S_1/ = S_1.a \; ; \qquad M/S_2/ = - S_2.b \; ;$$

Dodając te rownosci otrzymamy:

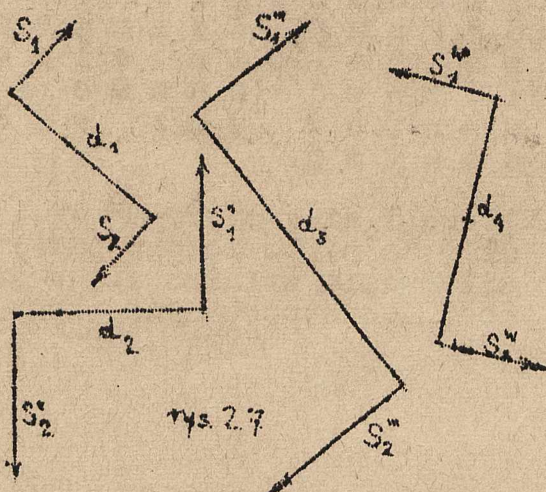
$$M/S_1/ + M/S_2/ = S_1.a - S_2.b = - S/b-a/=-S.d$$

przyczym S jest liczbową wartoscią sił pary $S_1$ i $S_2$, otrzymalismy tu znak "-" przed iloczynem Sd, poniewaz para sił $/S_1, S_2/$ obraca ramię w kierunku przeciwnym obrotowi wskazowek zegara. Ostatecznei mamy, że:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = M/S_1, S_2/ \text{ bo } M/S_1, S_2/ = - S.d$$

Przejdziemy teraz do skaładnai pary sił; złozyć kilka par sił, to znaczy zastąpic je jedną wypadkową parą sił, rozłozyć zas parę sił - znaczy zastąpic jedną parę sił przez kilka par sił, wywierających to samo działanie na bryłę materialną.

Rozpatrzymy z początku najprostszy wypadek, mianowicie kiedy płaszczyzny działania składowych par są wspolne albo wzajemnie rownoległe.



rys. 27

W wypadku kiedy płaszczyzny działania par sił są wzajemnie rownoległe, mozemy na zasadzie II-go twierdzenia o parach, wszystkie pary sił przenieść na jedną płaszczyznę; przyjmijmy tę płaszczyznę za płaszczyznę rysunku/27/ i przypuśćmy, że mamy n par sił $/S'_1, S'_2/, /S''_1, S''_2/ \ldots /S^n_1, S^n_2/$, ktorych ra-

miona są odpowiedno równe $d_1, d_2, d_3 \ldots\ldots d_n$.

Aby złożyć te pary przekształcimy je tak, żeby wszystkie miały to samo ramię d, co możemy uczynić na mocy IV twierdzenia o parach.

Na zasadzie II i III twierdzenia o parach, przeniesiemy je tak, aby wszystkie pary składane posiadały wspólne ramię d. Wtedy liczbowe wartosci sił par odpowiednio będą:

$$S' . \frac{d_1}{d} \; ; \quad S'' . \frac{d_2}{d} \; ; \quad S''' . \frac{d_3}{d} \; ; \ldots \quad S^n . \frac{d_n}{d} \; ;$$

składając wszystkie siły, działające na jeden i na drugi koniec ramienia d otrzymamy parę o ramieniu d i o siłach, których liczebna wartość będzie się równać sumie algebraicznej:

miona $\frac{1}{d} / S'.d_1 - S''.d_2 + S'''.d_3 + \ldots S^n.d_n / = S$

rys.28/. Mamy:

$$M/S_1, S_2/ = d. \frac{1}{d} / S'.d_1 - S''.d_2 + \ldots S^n.d_n / =$$
$$= S'.d_1 - S''.d_2 + \ldots - S^n.d_n.$$

z drugiej strony mamy że:

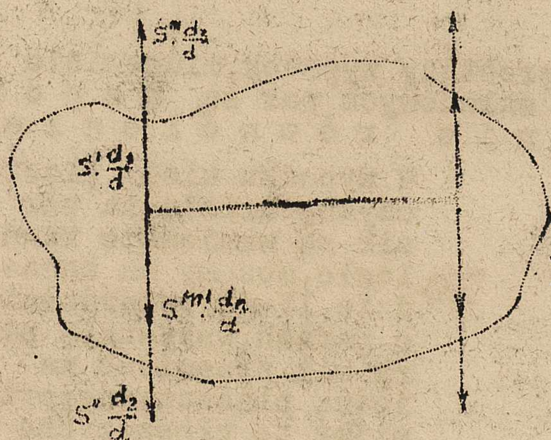
$$S'.d_1 = M/S_1', S_2'/, \quad -S''.d_2 = M/S_1'', S_2''/,$$

$$S'''.d_3 = M/S_1''', S_2''' / \;..\; S^n d_n = M/S_1^n, S_2^n /;$$

ostatecznie więc:

$$M/S_1, S_2/ = M/S_1', S_2'/ + M/S_1'', S_2''/ + M/S_1''', S_2'''/ + \ldots$$
$$\ldots + M/S_1^n, S_2^n /;$$

formułujemy to, jako następujaca twierdzenie:



rys. 28

Moment pary wypadkowej od składania kilku par, posiadających wspólne albo wzajemnie równoległe płaszczyzny działania równa się algebraicznej sumie momentów par składowych.

Jezeli siły mierzymy kg., a długość m., to moment pary sił będzie wyrażać się w jednostkach stosowanych -kgm.

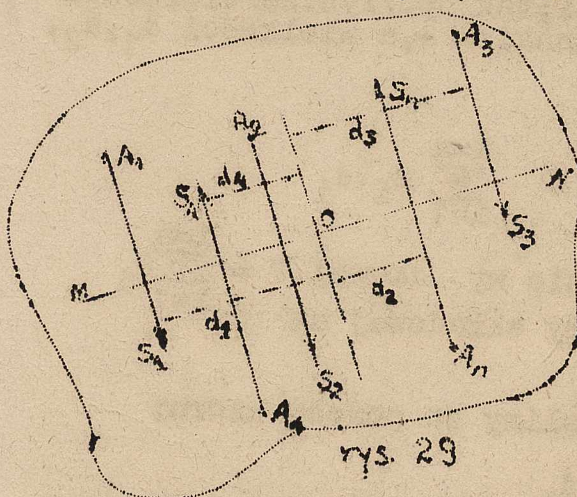
Dla zakończenia teorii par musimy jeszcze rozpatrzeć składanie i rozkładanie par w wypadku ogólnym; mianowicie kiedy płaszczyzny działania par nie są wzajemnie równoległe, lecz mogą się przecinać. Ponieważ składanie takich par sił sprowadza się do składania sił, działających pod kątem, to składanie ich rozpatrzymy w następnym rozdziale, w którym zajmiemy się siłami o prostych działnia, przecinających się wzajemnie.

## § 5 Dowolna ilość sił wzajemnie równoległych, skierowanych w przeciwne strony i znajdujących się na jednej płaszczyźnie.

Przypuśćmy, że mamy na płaszczyźnie siły $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ wzajemnie równoległe i skierowane w różne strony.

Umówmy się uważać siły za dodatnie, gdy są skierowane w jedną stronę, i za ujemne, gdy w stronę przeciwną.

Oznaczmy przez $/x_1,y_1/,/x_2,y_2/,/x_3,y_3/ \ldots /x_n,y_n/$ współrzędne punktu zaczepienia $A_1$ $A_2, A_3 \ldots A_n$ sił układu $S_1, S_2,$ $S_3 \ldots S_n$.



rys. 29

Weźmiemy wszystkie siły układu skierowane w tę samą stronę, np. siły dodatnie i znajdziemy ich wypadkową $W_1$ według sposobu wyłożonego w § 2 tego rozdziału.

Następnie złożymy wszystkie siły ujemne, otrzymamy znów pewną wypadkową $W_2$, równoległą do wypadkowej $W_1$ i skierowaną w stronę przeciwną. Zachodzić mogą przy tym trzy wypadki.

Wypadek pierwszy: siły $W_1$ i $W_2$ nie są sobie równe, co do liczebnej wartości, a proste działania ich są wspólne albo wzajemnie równoległe.

Składając te siły $W_1$ i $W_2$ na zasadzie §3 otrzymymy wypadkową W, która będzie zarazem wypadkową układu sił: $S_1$ $S_2, S_3 \ldots S_n$. Liczebna wartość i kierunek /znak/ tej wypadkowej W określi suma algebraiczna sił układu $S_1, S_2, S_3$ $S_n$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = W_1 - W_2 = W \neq 0$$

Pozostaje jeszcze określić prostą działania wypadkowej. Podamy tu dwa sposoby dla jej wyznaczenia.

Pierwszy sposób oparty na twierdzeniu Varignona, które możemy udowodnić w analogiczny sposób do poprzednich.

Twierdzenie: Moment statyczny wypadkowej wielu sił wzajemnie równoległych, skierowanych w przeciwne strony i znajdujących się na jednej płaszczyźnie, względem dowolnego bieguna tej płaszczyzny, równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych względem tegoż bieguna.

Weźmy biegun O na płaszczyznie działania sił i przeprowadźmy przez niego prostą MN prostopadle do prostych działania sił układu. Oznaczymy ramiona sił odpowiednio przez $d_1, d_2, d_3 .. d_n$, uważając je jako dodatnie (+) gdy są odłożone od bieguna O w jedną stronę, np. w prawo i jako ujemne (-), gdy są odłożone od bieguna O w stronę przeciwną, np. w lewo. Przytym jako dodatnie uważamy te siły, które mając ramię dodatnie, bedą miec moment względem bieguna O dodatni; tak np. /rys.29/ wielkości $d_3$, $d_n$, $S_3$, $S_2$, $S_1$ bierzemy ze znakiem +, a wielkości $d_1$, $d_2$, $S_4$, $S_n$ ze znakiem "-".

Będziemy miec wówczas:

$$W \cdot d = d \cdot \sum_{i=1}^{i=n} S_i = \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot d_i$$

przyczym d oznacza tu ramię wypadkowej $W = \sum_{i=1}^{i=n} S_i$

a $S_i d_i = M/S_i/$ moment siły składowej układu $S_i$ względem bieguna O.

Ramię wypadkowej W określimy za pomocą wzoru:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i}$$

Jezeli na prostej MN odłożymy odcinek OA = d od bieguna O, w prawo lub w lewo, w zależności od znaku d, to otrzymamy jeden z możliwych punktów zaczepienia wypadkowej W, a więc określimy prostą jej działania.

Drugi sposób dla określenia prostej działania wypadkowej, polega na wyznaczaniu środka układu sił równoległych, przez który musi przechodzić prosta działania wypadkowej W.

Dla wyznaczenia współrzędnej środka użyjemy otrzymanych w § 2-im wzorów na współrzędne środka wielu sił

rownoległych, jednakowo skierowanych i wzorow otrzymanych w § 3-im, na wspołrzedne srodka dwoch sił rownoległych, skierowanych w przeciwne strony. Oznaczymy przez $S_1, S_2, S_3 .. S_m$ siły układu skierowane w jedną stronę, a przez $S_{m+1}, S_{m+2} ... S_n$ skierowane w przeciwną.

Jako punkt zaczepienia wypadkowej $W_1$, sił $S_1, S_2 .. S_m$ obierzemy srodek tych sił, ktorego wspołrzędne $x'_s$, $y'_s$ okreslimy za pomocą wzorow:

$$x'_s = \frac{S_1 . x_1 + S_2 . x_2 + S_3 . x_3 + .. S_m . x_m}{S_1 + S_2 + S_3 + .... S_m}$$

$$y'_s = \frac{S_1 . y_1 + S_2 . y_2 + S_3 . y_3 + .. . S_m . y_m}{S_1 + S_2 + S_3 + .... S_m}$$

Jako punkt zaczepienia wypadkowej $W_2$, skierowanych odwrotnie sił $S_{m+1}, S_{m+2}, S_{m+3} .. S_n$, obierzemy tez ich srodek ktorego wspołrzędne $x''_s$, $y''_s$ okreslimy wzorami analogicznymi do poprzednich:

$$x''_s = \frac{S_{m+1} . x_{m+1} + S_{m+2} . x_{m+2} + ... S_n . x_n}{S_{m+1} + S_{m+2} + .... S_n}$$

$$y''_s = \frac{S_{m+1} . y_{m+1} + S_{m+2} . y_{m+2} + .. S_n . y_n}{S_{m+1} + S_{m+2} + .... S_n}$$

Wtedy dla wspołrzędnych srodka rownoległych sił $W_1$ i $W_2$, ktory zarazem będzie srodkiem wszystkich sił układu $S_1, S_2, .. S_n$, otrzymamy następujące wzory:

$$x_s = \frac{W_1 . x'_s + W_2 . x''_s}{W_1 + W_2} \qquad y_s = \frac{W_1 . y'_s + W_2 . y''_s}{W_1 + W_2}$$

gdzie musimy wstawić powyższe wzory dla $x'_s$, $y'_s$, $x''_s$, $y''_s$. Wykonywując tę operację, otrzymamy ostatecznie takie wyrazenia:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i . x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i} \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i . y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i}$$

Wypadek drugi: S i ł y $W_1$ i $W_2$ s ą soobie równe, co do liczebnej wartości, a proste ich działania są wzajemnie równoległe. Mamy w tym wypadku p a r ę s i ł.

Suma algebraiczna sił układu: $S_1 + S_2 + S_3 \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{i=n} S_i = 0$, $W = W_1 - W_2 = 0$; suma algebraiczna momentów sił układu, względem dowolnego bieguna, leżącego w płaszczyźnie sił, musi być równa momentowi pary sił /patrz tw.V, §4/, a więc ta suma nie może być równa zeru:

$$M = M/W_1, W_2/ = \sum_{i=1}^{i=n} S_i . d_i \neq 0$$

Ostatnie równanie daje nam wartość i znak momentu pary sił, a więc w zupełności określa parę.

Wypadek trzeci: s i ł y $W_1$ i $W_2$ s ą s o b i e równe, co do liczebnej wartości i działają wzdłuż tej samej prostej. W tym wypadku mamy równowagę sił, czyli siły układu wzajemnie równoważą się.

Suma algebraiczna sił układu $S_1 + S_2 + S_3 + S_n = \sum_{i=1}^{i=n} S_i = 0$ i suma algebraiczna momentów statycznych sił układu, względem dowolnego bieguna w płaszczyźnie sił, też jest równa zeru:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} S_i . d_i = 0$$

Dlatego też warunkami k o n i e c z n y m i i w y s t a r c z a j ą c y m i dla równowagi wzajemnie równoległych sił na płaszczyźnie są równania

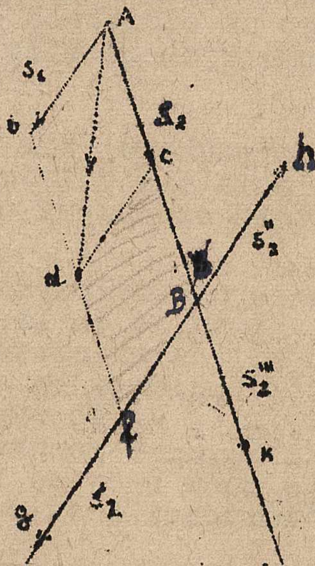
$$\sum_{i=1}^{i=n} S_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} S_i . d_i = 0$$

# III. Siłyy których proste działaania przecinają się w jednym punkcie.

## §.1. Dwie siły działające na jeden punkt bryły materialnej

Wyobraźmy sobie, że na dwa punkty bryłą matrialnej działają siły, których proste działnia przecinaja się w jednym punkcie. Na zasadzie 3-go prawa statyki /rozdział I/ możemy te siły przesunąc wzdłuż ich prostych działania do wzajemnego punktu przecięcia się; otrzymamy wtedy dwie siły, działające na jeden punkt pod pewnym kątem do siebie.

Niech więc na punkt A bryły materialnej /rys. 30/ działają siły $S_1$ i $S_2$. Wyprowadzimy prawo składania takich sił, to jest wyznaczymy ich wypadkową.



rys. 30.

W tym celu przedłużymy prosta działania siły $S_2$, Ac, o odcinek cB rowny długosci odcinka Ab; następnie z punktow c i B przeprowadzimy odcinki prostych cd i Bf, rowne i rownolegle do odcinka Ab. Łącząc za pomocą prostej df punkty d i f otrzymamy ukosnik cBfd. Odłożymy na przedłużeniach odcinka fB odcinki Bh i fg, rowne długosci odcinka Ac; odcinki te będą geometrycznie przedstawiac siły $S_2'$ i $S_2''$, rowne co do liczebnej wartosci, lecz skierowane przeciwnie wzdłuz prostej ich działania fB.

Przesuniemy siłę $S_2$ działającą na punkt A, wzdłuż jej prostej działania Ac w położenie Bk; otrzymamy siłę działającą na punkt B, ktbrą oznaczymy przez $S_2'''$. Otrzymujemy wówczas zamiast dwoch sił $S_1$ i $S_2$ działających na punkt A, cztery siły: $S_1$=Ab, działająca na punkt A, $S_2''$ i $S_2'''$ działające na punkt B i wreszcie siłę $S_2'$, działającą na punkt f. Ta ostatnią siłę $S_2'$ możemy przesunąc wzdłuż jej prostej działania fg i przyłozyc w punkcie B. Wtedy na punkt B będą działały trzy rowne, co do liczebnej wartosci siły $S_2'$ $S_2''$ i $S_2'''$ a procz tego pozostaje jeszcze siła $S_1$ działająca na punkt A. Ponieważ dwie siły $S_2'$ i $S_2''$ wzajemnie się rownoważą, to wypadkowa czterech sił $S_1$, $S_2'$, $S_2''$ i $S_2'''$ musi byc rownoważną wypadkową dwoch sił początkowych

$S_1$ i $S_2$ i dlatego musi przechodzić przez te same punkty bryły.

Wypadkowa dwoch wzajemnie rownoleglych sił $S_1$ i $S_2'$ na zasadzie § 1 poprzedniego rozdziału II musi przechodzic przez punkty c i t.d.

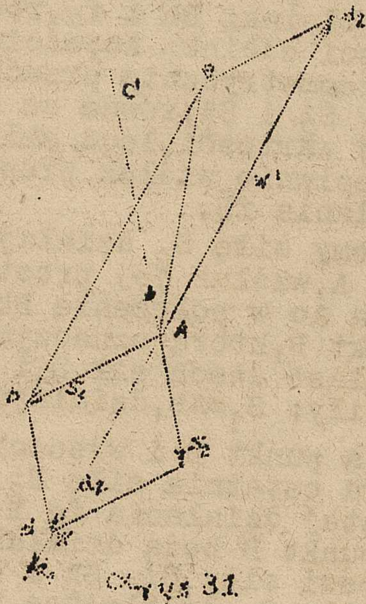
O siłach $S_2''$ i $S_2'''$ działających na punkt B pod kątem do siebie, możemy na zasadzie 4-tego prawa statyki /rozdzial I/ powiedzie, że kierunek ich wypadkowej musi dzielic na pol kąt h B k, t.j. musi przechodzic po przekątnej Bd ukosnika cBfd.

Stąd wnioskujemy, że kierunek wypadkowej sił $S_2''$ i $S_2'''$ przechodzi przez punkt d, a wiec i wypadkowa wszystkich czterech sił $S_1$, $S_2'$, $S_2''$, $S_2'''$, tez musi przechodzic przez punkt d, a stąd analogicznie i wypadkowa dwoch sił $S_1$ i $S_2$.

Ponieważ te dwie siły $S_1$ i $S_2$ działają na punkt A, więc i ich wypadkowa też przechodzi przez punkt A.

Reasumując, mamy, że wypadkowa, przechodząc jednoczesnie przez punkty A, d, musi byc skierowana wzdłuż przekątnej Ad rownolegloboku Acdb, wykreslonego na odcinkach prostych Ad i Ac, przedstawiających geometrycznie siły składowe $S_1$ i $S_2$.

Określimy więc prostą działania wypadkowej sił $S_1$ i $S_2$ przechodzącą przez punkt A, zaczepienia sił składowych. Liczebna wartość tej wypadkowej, ktorą oznaczymy przez W jest nam narazie nieznana.



rys.31

Aby ją wyznaczyc przyłożymy do punktu A siłę W' rowną, co do liczebnej wartosci sile W, lecz skierowaną przeciwnie /rys. 31/. Ponieważ ta siła W' rownoważy siły $S_1$ i $S_2$, to wypadkowa dwoch sił W' i $S_1$, musi rownoważyc siłe $S_2$, a więc musi być jej rowna co do liczebnej wartosci i skierowana przeciwnie.

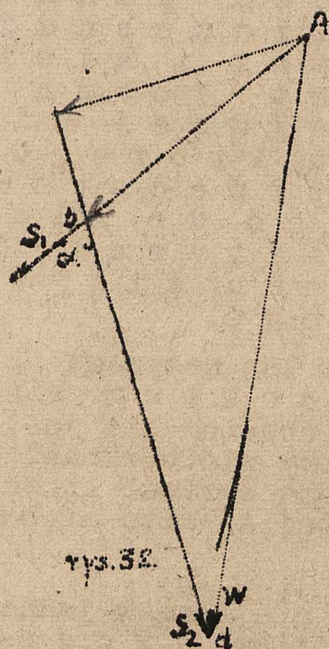
Przypuśćmy, że liczebna wartosc wypadkowej W jest rowna odcinkowi $Ad_1$, wiekszemu od długosci przekątnej Ad; wtedy siła W' jako rowna sile W, co do liczebnej wartosci, lecz przeciwnie skierowana, będzie przedstawiona /rys.31/ odcinkiem $Ad_2 = Ad_1$. Wypadkowa zas tych dwoch sił W' i $S_1$ będzie na zasadzie tylko co udowodnionego prawa skierowana wzdłuż przekątnej Ae rownoległoboku $Abed_2$, wykreslonego na siłach W' i $S_1$. A więc wypadkowa tą będzie działała nie wzdłuż przedłużenia Ac' prostej działania siły $S_2$ - Ac, lecz wzdłuż jakiejs innej prostej Ae a jezeli tak, to na zasadzie 2-go prawa statyki /rozdzial I/ w żaden sposob nie może zrownoważyc siły $S_2$.

Otrzymaliśmy sprzeczność, przypuszczając, że liczebna wartość wypadkowej W jest większa od długości przekątnej równoległoboku Acdb.

Analogicznie przyjdziemy znowu do sprzeczności, jeżeli założymy, że liczebna wartość wypadkowej W sił $S_1$ i $S_2$ jest równa jakiejś długości $Ad_2$ /rys. 31/mniejszej od przekątnej A.d, a więc liczebna wartość wypadkowej W jest równa długości przekątnej = A.d = W. Możemy więc wygłosić następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e: W y p a d k o w a  d w ó c h  s i ł,  d z i a ł a j ą c y c h  n a  j e d e n  p u n k t  b r y ł y  m a t e r i a l n e j,  r ó w n a  s i ę  c o  d o  l i c z e b n e j  w a r t o ś c i  d ł u g o ś c i  p r z e k ą t n e j  r ó w n o l e g ł o b o k u,  w y k r e ś l o n e g o  n a  s i ł a c h  s k ł a d o w y c h  i  j e s t  s k i e r o w a n a  w z d ł u ż  t e j ż e  p r z e k ą t n e j.

Zauważymy, że niema potrzeby wykreślania równoległoboku aby znaleźć wypadkową W, dostatecznie wykreślić trójkąt /rys. 32/; z dowolnego punktu A przeprowadzimy odcinek prostej Ab, równy i równoległy do siły $S_1$, i skierowany w tą samą stronę, następnie z końca tego odcinka b przeprowadzimy odcinek bd, równy i równoległy do siły $S_2$. Łącząc punkty A i d za pomocą odcinka prostej Ad, otrzymamy trójkąt Abd, którego bok Ad będzie przedstawiał, co do liczebnej wartości i kierunku, wypadkową W sił składowych $S_1$ i $S_2$.



rys. 32.

Dla obliczenia liczebnej wartości i kierunku wypadkowej W mogą służyć następujące wzory, które otrzymujemy wprost z własności trójkąta:

$$W^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 . S_2 \cos /S_1, S_2/$$

1 $S_1 : S_2 : W = \sin /S_2, W/ : \sin /S_1 W/ : \sin /S_1 S_2/$

przyczem: $\sphericalangle S_1, S_2/ = \alpha$

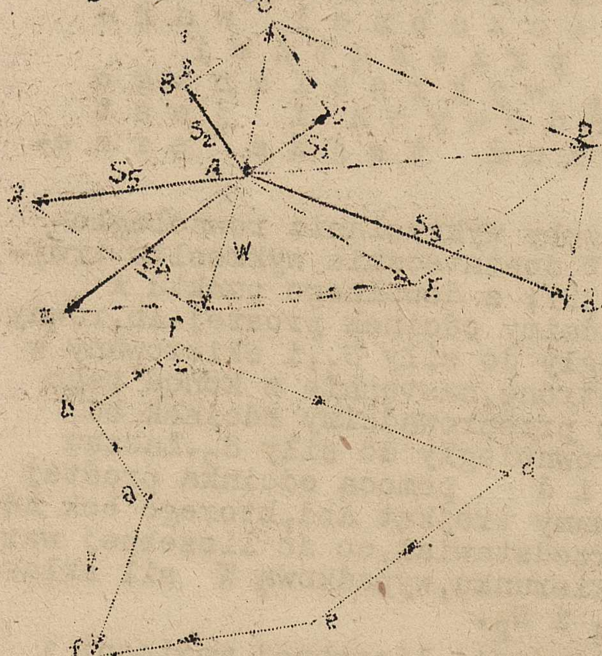
Na zasadzie poprzedniego możemy r o z ł o ż y ć daną siłę na dwie składowe, kierunki których tworzą między sobą kąt $\alpha \neq 0°$, i $\neq 180°$ przytem mogą być następujące dane:

1. liczbowa wartość i kierunek jednej składowej;
2. proste działania obu składowych;
3. liczbowa wartość obu składowych;
4. wartość liczbowa jednej składowej i kierunek drugiej.

Z a u w a ż y m y, ż e r ó w n o w a g a w t y m w y p a d k u o c z y w i ś c i e z a j ś ć n i e m o ż e.

## § 2. W i e l e s i ł d z i a ł a j ą c y c h n a j e d e n p u n k t b r y ł y m a t e r i a l n e j.

Miejmy dowolną ilość sił,których proste działania przecinają się wzajemnie w jednym i tym samym punkcie;przesuńte siły wzdłuż prostych działania aż do punktu wzajemnego przecięcia się otrzymamy układ sił, działających na jeden i ten sam punkt /rys.33/Np.na punkt A,działają siły $S_1$,$S_2$ $S_3$,$S_4$ i $S_5$.Stosując udowodnione w § 11 tego rozdziału, twierdzenie o równoległoboku sił z początku jakichkolwiek dwóch sił,np.$S_1$ i $S_2$ następnie do wypadkowej $W_1$ sił $S_1$ i $S_2$ i do siły $S_3$ i td. otrzymujemy następujący wniosek:




W y p a d k o w a w i e l u s i ł,d z i a ł a j ą c y h n a j e d e n p u n k t c o d o l i c z e b n e j w a r t o ś c i i k i e r u n k u j e s t r ó w n a z a m y k a j ą c e j w i e l o b o k u, k t ó r e g o b o k i p r z e d s t a w i a j ą, c o d o l i c z e b n e j w a r t o ś c i i k i e r u n k u, s i ł y s k ł a d o w e.

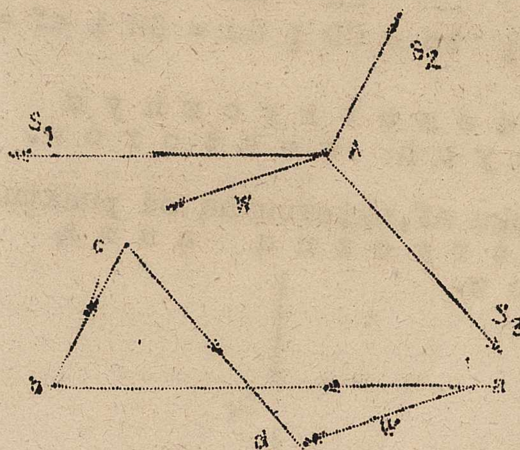
Wielobok ten nazywamy w i e l o b o k i e m s i ł, dla sił $S_1$,$S_2$,$S_3$,$S_4$ i $S_5$; na rys.33 wielobokiem sił jest wielobok Abcdef. [illegible] oddzielnie wykreślony wielobok abcdef. Wypadkowa sił składowych W posiada tę samą wartość liczebną i ten sam kierunek,co i odcinek prostej AF albo af,będącego zamykającą wieloboku sił.

W ogólnym wypadku,kiedy siły składowe nie leżą w jednej płaszczyźnie,wielobok sił będzie wielobokiem p r z e s t r z e n n y m i tylko w wypadku szczególnym,kiedy siły składowe znajdują się na jednej płaszczyźnie działania, wielobok ten będzie wielobokiem p ł a s k i m. Zauważymy, że boki wieloboku sił mogą wzajemnie przecinać się;np. wielobok sił /rys.34/abcd dla sił $S_1$,$S_2$,$S_3$ i $S_4$.

Wartość liczebna i kierunek wypadkowej,oczywiście nie ulegnie zmianie,gdy zmienimy porządek w którym przeprowadzamy boki wieloboku sił,albo kiedy niektóre siły składo-

we zamienimy przez ich wypadkowe.

W szczególnym wypadku kiedy mamy tylko trzy składowe siły: $S_1$, $S_2$ i $S_3$, działające na jeden punkt A, i nie leżące w jednej płaszczyźnie, wypadkową ich przedstawi się /rys.35/ za pomocą przekątnej równoległościanu zbudowanego na tych siłach, jako krawędziach.




Rys. 34.

Zagadnienie o rozłożeniu danej siły na n składowych nie leżących z nią w jednej płaszczyźnie, będzie w zupełności określonym, jak to widzimy z wieloboku sił, gdy dane są wartości liczbowe i kierunki /n-1/ składowych. Będzie ono również określone w pewnych innych wypadkach np. kiedy rozkładamy daną siłę na trzy składowe, skierowane wzdłuż trzech prostych. Jeżeli te proste są wzajemnie prostopadłe to składowe są równe, co do liczebnej wartości, rzutom danej siły na te proste.

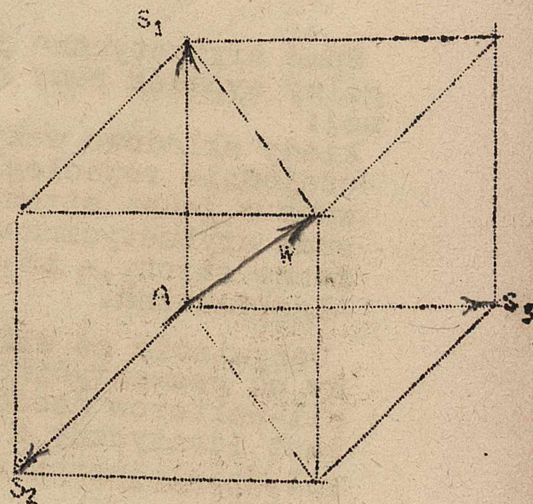
W a r u n k i e m k o n i e c z n y m i w y s t a r c z a j ą c y m, aby kilka sił działających na jeden punkt bryły materialnej wzajemnie równoważyły się, jest, aby w i e l o b o k s i ł b y ł z a m k n i ę t y.

W szczególnym wypadku kiedy mamy tylko trzy siły składowe, $S_1$, $S_2$, $S_3$ działające na jeden punkt, warunkiem niezbędnym dla równowagi jest:

1. aby leżały one w jednej płaszczyźnie, ponieważ każda z nich musi być równa, co do liczebnej wartości i przeciwnie skierowana od wypadkowej dwóch innych sił;
2. aby czyniły one zadość równaniom:

$$S_1 : S_2 : S_3 = \sin(S_2, S_3) : \sin(S_1, S_3) : \sin(S_1, S_2)$$

ponieważ wielobok sił w tym wypadku jest trójkątem.




Rys. 35.

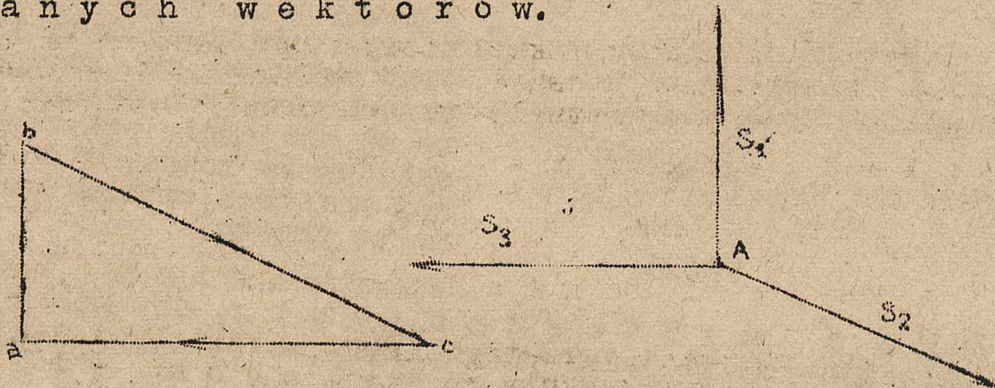
Przypuśćmy, że mamy dowolną ilość wektorów, np. sił przedstawionych za pomocą odcinków prostych: AB, CD, EF, GH, JK i znajdujących się w ogólnym wypadku w przestrzeni;

w szczególnym wypadku wektroy te mogą leżeć na jednej ~~nej~~ płaszczyźnie. Weźmy dowolny punkt a /rys. 37/ i przeprowadzimy z niego odcinek prostej $\overline{ab}$ równy i równoległy do wektora $\overline{AB}$; z punktu b przeprowadzimy odcinek prostej $\overline{bc}$, równy i równoległy do wektora $\overline{CD}$; następnie z punktu c odcunek równy i równoległy do wektora $\overline{EF}$ i td. Wtedy mamy że:

$$\overline{ab} = \overline{AB} \ ; \ \overline{cd} = \overline{EF} ; \ \overline{bc} = \overline{CD} \ ; \ \overline{de} = \overline{GH} \text{ i } \overline{ef} = \overline{JK}$$

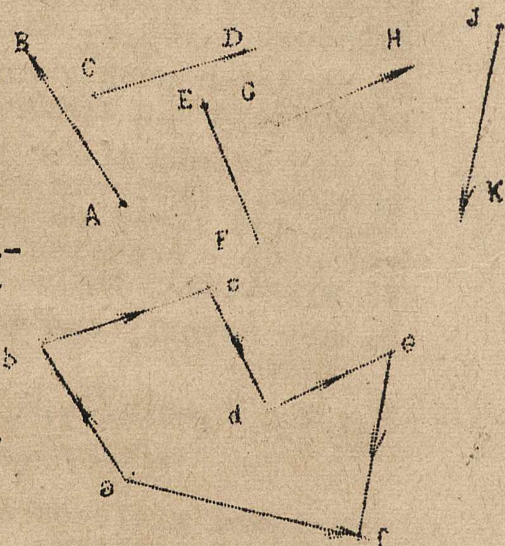
Tą operację nazywamy **geometrycznym składaniem danych wektorów.**

Zamykającą danego wieloboku af, skierowaną od punktu a do f nazywamy **geometryczną sumą danych wektorów.**




Rys. 36.

Sume arytmetyczna i algebraiczna mozemy uwazac za szczególny wypadek sumy geometrycznej:
kiedy skladowe wektora sa wzajemnie rownolegle i skierowane w jedna strone, to mamy sume arytmetyczna - a kiedy w rozne strony, - to mamy sume algebraiczna.




Rys. 37.

Oczywiscie ze wielobok otrzymany od geometrycznego dodawania sil-wektorow abcdef /rys. 37/ jest identyczny z wielobokiem sil, dzialajacych na jeden punkt.

Otrzymalismy wtedy nastepujace twierdzenie:

**Twierdzenie:** Wypadkowa wielu sil, dzialajacych na jeden punkt,

j e s t r ó w n a, c o d o l i c z e b n e j w a r t o s c i i k i e r u n k u g e o m e t r y c z n e j s u m i e s i ł s k ł a d o w y c h.

Wszystkie zagadnienia o składaniu,rozkładaniu i równowadze sił,działajacych na jeden punkt bryły materialnej, mogą być rozwiązane za pomocą rzutów sił na osie współrzędnych wzajemnie prostopadłych,jako najprostrzych.

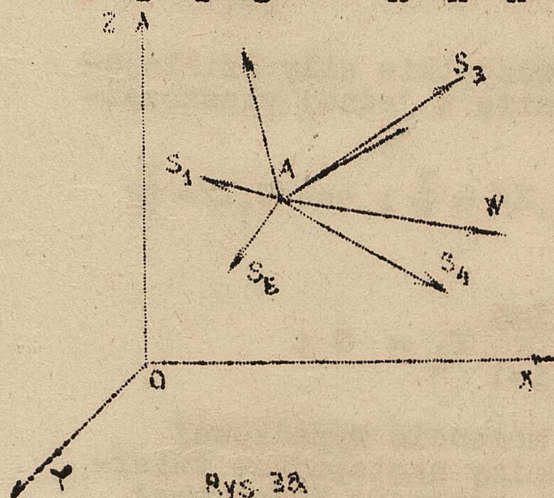
Z geometrii analitycznej udowadnia się następujące twierdzenie:

R z u t g e o m e t r y c z n e j s u m y w i e l u w e k t o r ó w s k ł a d o w y c h n a d o w o l n ą o ś r ó w n a s i ę a l a l g e b r ą i c z n e j s u m i e r z u t ó w w e k t o r ó w s k ł a d o w y c h n a t ą s a m ą o s.

Zauważymy,że wielobok wektorów może być zarówno płaski,jak i przestrzenny,Stosując to twierdzenie do wieloboku sił,otrzymujemy następujące twierdzenie statyki:

T w i e r d z e n i e: R z u t w y p a d k o w e j w i e l u s i ł, d z i a ł a j ą c y h n a j e d e n p u n k t, naa d o w o l n ą o ś, r ó w n a s i ę a l g e b r a i c z n e j s u m i e r z u t ó w s i ł s k ł a d o w y c h n a t ę s a m ą o s.

Weźmy trzy wzajemnie prostopadłe osie współrzednych OX, OY i OZ; oznaczymy rzuty sił przez $S_1/X_1?Y_1,Z_1/$ $S_2/X_2?Y_2,Z_2/$ .. $S_n/X_n,Y_n,Z_n/$, a przez $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, kąty, które prosta działania siły $S_i$ tworzy z osiami współrzędnych /OX,OY,OZ/ /rys.38/.



Rys. 38

Wtedy będziemy mieć: $X_i = S_i \cos\alpha_i$ $Y_i = S_i \cos\beta_i$, $Z_i = S_i \cos\gamma_i$ ,
przytem: $\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$, $i=1,2 ..n$

Oznaczymy przez W wypadkową danych sił,a przez X,Y,Z jej rzuty na osie współrzędnych. Na zasadzie powyższego twierdzenia będziemy mieli:

$$X = X_1 + X_2 + .. + X_i + .. X_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i + \dots Y_n = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_i + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i$$

Wartość liczebna wypadkowej i jej kierunek określimy za pomocą wzorów:

$$W = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos/W,X/ = \frac{X}{W}; \quad \cos/W,Y/ = \frac{Y}{W}; \quad \cos/W,Z/ = \frac{Z}{W};$$

Jezeli bedziemy mieli siłę W i /n-1/ jej składowych, to znajdziemy rzuty n-tej składowej za pomocą wzorów:

$$X_n = X - X_1 - X_2 - \dots - X_{n-1},$$

$$Y_n = Y - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_{n-1},$$

$$Z_n = Z - Z_1 - Z_2 - \dots - Z_{n-1},$$

Warunkiem k o n i e c z n y m i w y s t a r c z a j a c y m dla rownowagi sil, dzialajacych na jeden punkt bryly materialnej, jest aby $W = 0$, czyli:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0; \quad Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0; \quad Z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0$$

W szczegolnym wypadku kiedy wszystkie sily dzialajace na jeden punkt bryly sa zawarte w jednej plaszczyznie, mamy wzory:

$$W = \sqrt[2]{X^2 + Y^2}; \quad \cos/W_1,X/ = \frac{X}{W}; \quad \cos/W_1Y/ = \frac{Y}{W}$$

Warunkiem równowagi będzie:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0;$$

W rozdziale II mowiliśmy o momencie wypadkowej rownoległych sił teraz udowodnimy nastepujące twierdzenie V a r i g n o n a o momencie Wypadkowej sił działających na jeden punkt.

T w i e r d z e n i e. M o m e n t s t a t y c z n y w y p a d k o w e j w i e l u s i ł d z i a ł a j ą c y c h n a j e d e n p u n k t b r y ł y m a t e r i a l n e j, w z g l ę d e m

d o w o l n e g o   b i e g u n a, o b r a n e g o n a   i c h   p ł a s z c z y z n i e,   r ó w n a s i ę   a l g e b r a i c z n e j   s u m i e   m o m e n t ó w   s i ł   s k ł a d o w y c h   w z g l ę d e m   t e g o ż   b i e g u n a.

Udowodnimy początkowo to twierdzenie dla dwoch sił, działających na jeden punkt bryły materialnej pod kątem do siebie.

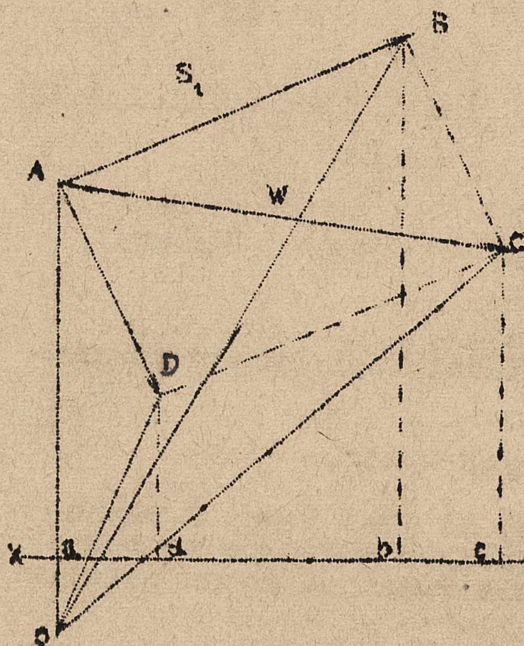
Przypuśćmy, że mamy takie dwie siły $S_1$ i $S_2$, składając je otrzymamy ich wypadkową W. Jako biegun, weźmiemy p punkt O.

Rozróżniamy dwa wypadki:

1. Momenty sił składowych względem obranego bieguna posiadają jednakowe znaki /rys.39/

2. Momenty sił, składowych względem obranego bieguna posiadają różne znaki /rys.40/

1. Połączymy biegun O prostymi z wierzchołkami rownoległoboku zbudowanego na siłach składowych $S_1$ i $S_2$, wtedy otrzymamy: /rys.39/



Rys.39.

$M/S_1/$ = 2 pole △ OAB,

$M/S_2/$ = 2 pole △ OAD,

$M/W$ / = 2 pole △ OAC

Przeprowadzimy prostą XY prostopadle do prostej OA, i rzutujamy na nią punkty B, C, D, oznaczając ich rzuty odpowiednimi małymi literami: b, c, d.
Przyjmujemy odcinek prostej OA za podstawę trojkątów OAB, OAC, OAD. Wtedy wysokości tych trojkątow odpowiednio będą: ab, ac, ad. Na zasadzie tego poprzednie równości, przyjmą następującą postac.

$M/S_1/$ = 2pole △ OAB = OA.ab

$M/S_2/$ = 2pole △ OAD = OA.ad

$M/W$ / = 2pole △ OAC = OA.ac

Dodając pierwsze dwie rownosci, otrzymamy:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = OA./ab+ad/$$

Ponieważ ad jest rzutem siły $S_2 = \overline{AD}$ i zgodnie z własnością równoległoboku $\overline{AD} = \overline{BC}$, to rzut odcinka $\overline{BC}$ = bc rowna sie rzutowi $\overline{ad}$, $\overline{bc} = \overline{ad}$.

możemy więc w ostatniej równości zamienić ad przez bc, wtedy:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = OA./ab+bc/$$

Widzimy, że $ab + bc = ac$

więc ostatecznie:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = OA \; . \; ac = M/W / \quad c.b.d.o.$$

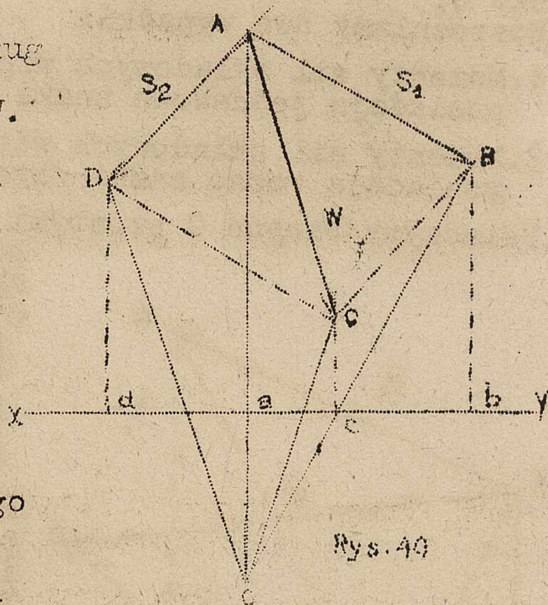
Rozpatrzymy teraz d r u g i w y p a d e k:

Przypuśćmy, że moment siły $S_1$ jest dodatni, a moment siły $S_2$ - ujemny /rys.40/

Składamy siły $S_1$ i $S_2$ według prawa równoległoboku sił, otrzymujemy ich wypadkową W.

Połączymy biegun O prostemi z wierzchołkami A, B, C i D, równoległoboku sił $S_1$ i $S_2$.

Przeprowadzamy prostą X Y prostopadle do linii O A i rzutujemy na nią wierzchołki równoległoboku A, B, C, i D. Otrzymujemy punkty a, b, c, i d.



Rys.40

Analogicznie do poprzedniego mamy:

$$M/S_1/ = OA \; . \; ab$$

$$M/S_2/ = -OA \; . \; ad,$$

ponieważ $M/S_2/$ jest ujemny. Składając otrzymane równości dostajemy:

$$M/S_1/ - M/S_2/ = OA \; /ab - ad/.$$

Zauważymy, że odcinek prostej AD jest równy i równoległy do odcinka BC, więc rzuty tych odcinków są też sobie równe: ad = cb. Poprzednie równanie można przepisać tak:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = AO./ab-cb/$$

ale że mamy, że $ab - cb = ac$ więc:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = OA \; . \; ac,$$

czyli ostatecznie:

$$M/S_1/ + M/S_2/ = M/W / \quad c.b.d.o.$$

Twierdzenie Varignona udowodnione dla dwóch sił możemy uogólnić na dowolną ilość sił, działających na jeden

punkt bryły materialnej. $S_1$, $S_2$, $S_3$, ........, $S_n$.
Stosujemy powyższe twierdzenie, początkowo do dwóch jakichkolwiek sił np. $S_1$ i $S_2$; następnie do sił $W_1$ - wypadkowej sił $S_1$ i $S_2$, i do siły $S_3$ i.t.d. Otrzymujemy wtedy równości:

$$M/W_1/ = M/S_1/ + M/S_2/$$

$$M/W_2/ = M/W_1/ + M/S_3/,$$

$$M/W_3/ = M/W_2/ + M/S_4/,$$

..........................................

$$M/W/ = M/W_{n-2}/ + M/S_n/$$

Dodając je stronami i redukując podobne wyrazy, otrzymamy:

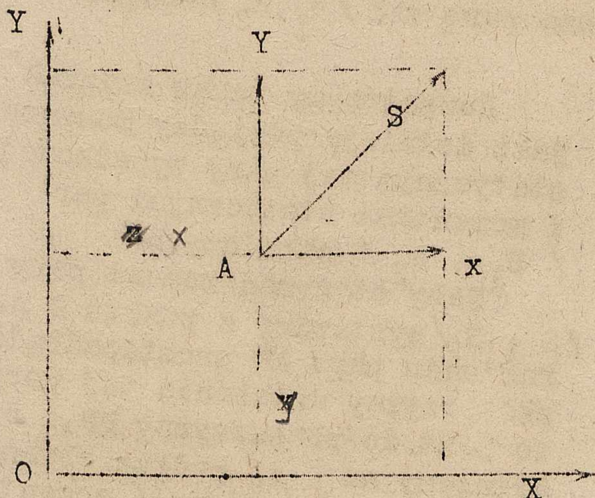
$$M/W = S_1/ + M/S_2/ + M/S_3/ + \ldots\ldots + M/S_n/ \quad \text{c.b.d.o.}$$

Z tego twierdzenia wynika następujący ważny w n i o s e k :

J e ż e l i b i e g u n z n a j d u j e s i ę n a p r o s t e j d z i a ł a n i a w y p a d k o w e j , t o s u m a a l g e b r a i c z n a m o m e n t ó w s t a t y c z n y c h s i ł s k ł a d o w y c h r ó w n a s i ę z e r u.

Wyprowadzimy teraz analityczne wyrażenie dla momentu statycznego siły S. względem bieguna O.

Przypuśćmy, że na płaszczyźnie zawierającej siłę S i biegun O wzięliśmy dwie wzajemnie prostopadłe osie współrzędnych OX i OY. Obierzemy biegun O za początek współrzędnych X O Y i rozłożymy daną siłę S na dwie siły składowe: X i Y, których proste działania przechodzą przez punkt zaczepienia siły S t.zn. punkt A / x, y/ i są równoległe do osi współrzędnych /rys.41/.




Wtedy na zasadzie twierdzenia Varignona mamy:

$$M/S/ = M/X/ + M/Y/$$

ale z określenia momentu wynika że

$$M/X/ = X.y, \quad M/Y/ = -Y.x$$

więc ostatecznie:

$$M/S/ = X.y - Y.x.$$

Ten wzór przedstawia analityczne wyrażenie momentu siły względem początku współrzędnych. Aby więc módz analitycznie wyznaczyć moment siły, musimy znać współrzędne punktu zaczepienia siły /x, y/ i rzuty siły na osie współrzędnych X i Y.

## 3. Geometryczne dodawanie momentów statycznych sił i par sił.

W § 4 rozdziału II-go wyłożyliśmy ogólną teorję par sił, pozostaje jeszcze rozpatrzeć składanie i rozkładanie par, których płaszczyzny działania nie są wspólne, ani równoległe, lecz wzajemnie się przecinają.

Rozpatrzymy z początku wypadek dwóch par, żeby te pary złożyć, przekształcimy je w ten sposób, aby ramiona ich były sobie równe, co do długości i zajęły tosamo położenie na prostej przecięcia się płaszczyzn działania par, co zawsze można uczynić, na zasadzie twierdzeń II, III, i IV, § 4 rozdziału II-go.

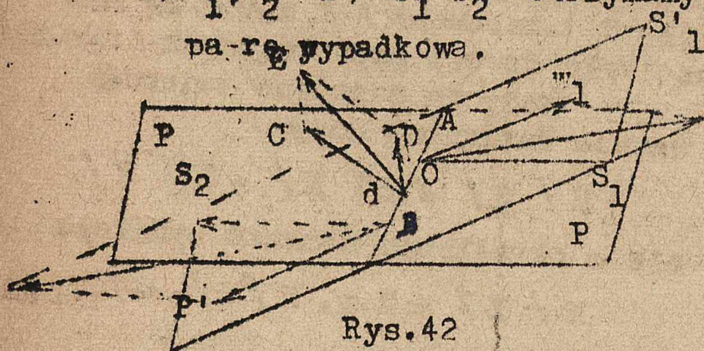
Po takim przekształceniu par, możemy je sobie wyobrazić tak, jak to jest zrobione na rys. 42, PP oznacza płaszczyznę działania pary $/S_1, S_2/$, P'P'-płaszczyznę działania drugiej pary $/S'_1, S'_2/$, a AB jest wspólne ich ramię.

Na punkt A działają dwie siły $S_1$ i $S'_1$, leżące w jednej i tej samej płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt A, prostopadłej do prostej AB.

Na punkt B też działają dwie siły $S_2$ i $S'_2$, leżące w jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt B, prostopadłej do prostej A B. Oczywiście więc, że te dwie płaszczyzny są wzajemnie równoległe.

Składając te dwie pary sił $/S_1, S'_1$ i $S_2, S'_2/$, otrzymamy ich wypadkowe $W_1$ i $W_2$, które będą sobie równe, co do liczebnej wartości, wzajemnie równoległe i skierowane w przeciwne strony, ponieważ otrzymaliśmy je od składania, równych co do liczebnej wartości, lecz wprost przeciwnie skierowanych sił.

Stąd widzimy, że w rezultacie składanie dwóch par sił $/S_1, S_2/$ i $/S'_1 S'_2/$ otrzymamy nową parę sił $/W_1, W_2/$ -czyli parę wypadkową.



Rys.42

Rozpatrzymy teraz związek jaki istnieje pomiędzy momentem statycznym tej pary wypadkowej i momentami statycznymi par $/S_1, S_2/$ składowych.

Żeby otrzymać moment pary $/S_1, S_2/$ wystawimy z punktu O na ramieniu pary AB prostopadłą do płaszczyzny działania tej pary, to jest do płaszczyzny PP, i odetniemy na niej podług obranej skali, liczbową wartość momentu pary $/S_1, S_2/$ tj. $S_1 \cdot AB$ czyli $S_1 \cdot d$, jeżeli $AB=d$. Będziemy mieli wtedy wektor $\overline{OD}$, równy, co do liczebnej wartości, iloczynowi $S_1 \cdot d$.

OE = W·d

Analogicznie napiszemy: $\overline{OC} = S_1 \cdot \overline{AB} = S_1 \cdot d$ i $\overline{OE} = W_1 \overline{AB} = W \cdot d$
Połaczymy punkty C i D prostemi z punktem E i udowodnimy, że otrzymany w ten sposób wielobok O C E D jest równoległobokiem.

Po pierwsze w trójkatach EOD i $\triangle W_1AS_1$ katy $\widehat{EOD}$ i $\widehat{W_1AS_1}$ sa sobie równe.

Po drugie mamy proporcję: $\overline{OD} : \overline{OE} = S_1 \cdot d : W_1 \cdot d = S_1 : W_1$

Stad widzimy, że trójkaty EOD i $W_1AS_1$, jako mające równe katy, zawarte między proporcjonalnymi bokamy, sa do siebie podobne.

Analogicznie udowodnimy podobieństwo trójkatów: EOC i $W_1AS_1$.

Z geometrji elementarnej wiemy, że dwa czworoboki, utworzone z podobnych trójkatów, sa do siebie podobne, dlatego, też czworobok OCED jest podobny do czworoboku $AS_1W_1S_1$.

Ponieważ zaś ten ostatni $AS_1W_1S_1$ jest równoległobokiem, to czworobok OCED jest też równoległobokiem, a wektor $\overline{OE}$ - jego przekatna.

Otrzymujemy wtedy następujace twierdzenie:

Twierdzenie. M o m e n t s t a t y c z n y w y p a d k o w e j p a r y s i ł o t r z y m a n e j o d s k ł a d a n i a d w ó c h p a r s i ł, w y r a ż a s i ę p r z e k a t n a r ó w n o l e g ł o b o k u, z b u d o w a n e g o n a m o m e n t a c h p a r s i ł s k ł a d o w y c h, j a k o n a b o k a c h.

W szczególnym wypadku, kiedy płaszczyzny działania par sił sa identyczne, albo wzajemnie równoległe, przekatna równa się sumie albo różnicy momentów statycznych par sił składowych.

W ogólnym wypadku, kiedy mamy kilka par sił składowych których płaszczyzny działania się przecinaja, to składamy początkowe pierwsze dwie pary, otrzymana parę wypadkowa następnie składamy z trzecia para i.t.d., wreszcie otrzymamy ogólna parę wypadkowa, której moment statyczny będzie zamykająca wielobok, którego inne boki sa równe, co do liczebnych wartości i równoległe do momentów statycznych par sił składowych.

M o m e n t s t a t y c z n y p a r y w y p a d k o w e j j e s t w i ę c g e o m e t r y c z n a s u m ą m o m e n t ó w s t a t y c z n y c h p a r s i ł s k ł a d o w y c h.

Rozpatrzone w końcu § 4 rozdziału II-go składaniepar sił o równoległych płaszczyznach działania jest więc szczególnym

wypadkiem składania par sił tak, jak algebraiczna suma jest szczególnym wypadkiem sumy geometrycznej. Jeżeli mamy trzy pary sił, to możemy ich statyczne momenty dodawać według prawidła równoległościanu.

To wszystko, co było powiedziane o rozkładaniu jednej siły na kilka sił składowych, może być zastosowane do rozkładania jednego momentu pary sił na kilka momentów składowych. Żeby rozłożyć daną parę sił na kilka par składowych, rozkładamy jej moment-wektor tak, jak to czyniliśmy z siłą, a następnie dla każdego momentu składowego bierzemy jaką bądź odpowiednią mu parę sił.

Para sił wypadkowa jest w zupełności okreslona jej statycznym momentem.

Kilka par sił będą w stanie równowagi, gdy geometryczna suma ich statycznych momentów jest równa zeru, w tym wypadku wypadkowa para sił posiada albo siły albo ramię równe zeru.

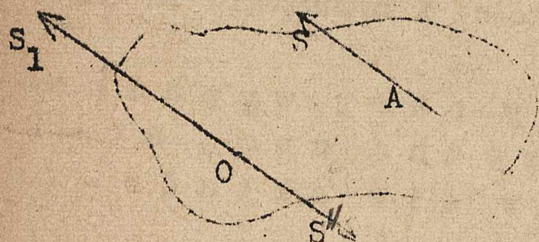
W § 2 tego rozdziału udowodniliśmy twierdzenie Varignona dotyczace zwiazku, jaki istnieje pomiędzy statycznym momentem wypadkowej, a momentami sił składowych, działających na jeden punkt i znajdujacy się na jednej płaszczyznie.

Udowodnimy teraz twierdzenie, dotyczace związku pomiędzy momentem statycznym wypadkowej, a momentami statycznemi sił składowych, działajacych na jeden punkt, i znajdujacy się w p r z e s t r z e n i.

Przedtem jednak musimy podać określenie moment siły względem bieguna w przestrzeni do czego posłuży podana nam w § 4 rozdziału II-go definicja momentu pary sił.

Przypuśćmy, że mamy siłę S i dowolny biegun O w przestrzeni/ rys 43/.

Przyłóżmy do punktu O dwie wprost przeciwnie skierowane siły S' i S" równe, co do liczebnej wartości, i równoległe do siły S. Oczywiście od tego działanie siły S na materjalną bryłę nie ulegnie zmianie.



Rys. 43

Otrzymamy wtedy parę sił /S, S"/, z których jedna jest dana siła, a drugą siła S", równa jej, co do liczebnej wartosci, i działająca na punkt O.

Moment statyczny pary sił /S ,S"/ nazywamy momentem statycznym siły S względem bieguna O.

Moment statyczny siły S względem bieguna O jest to więc na zasadzie §4 rozdz. II-go wektor $M = \overline{OK}$ ,którego liczebna wartość i kierunek są określone w następujący sposób.

Wartość liczebna jest równą iloczynowi wartości siły i odległości obranego bieguna od prostej działania siły,

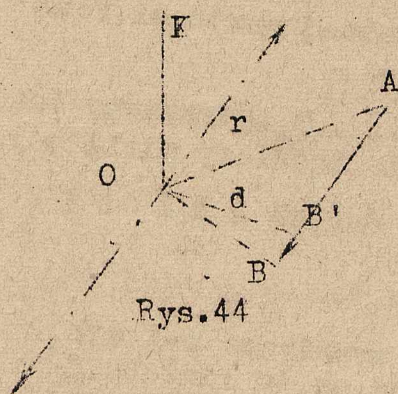
$M = \overline{OK} = S.d = 2$ pole $\triangle$ AOB $= S.r.\sin /S,r/$ /rys 44/.

kierunek zgodny z kierunkiem prostopadłej wystawionej do płaszczyzny ,przechodzącej przez dany biegun i prostą działania siły, w tę stronę, aby patrzący, znajdujący się na tej płaszczyźnie i mający prostopadłą skierowaną od nóg do głowy, widział siłę skierowaną od strony lewej ku prawej.

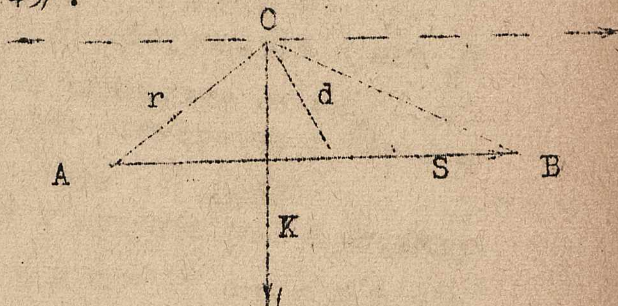
Oczywiste jest,że moment siły względem bieguna w przestrzeni posiada własności analogiczne do własności momentu siły względem bieguna na płaszczyźnie /1 rozdz.II./.

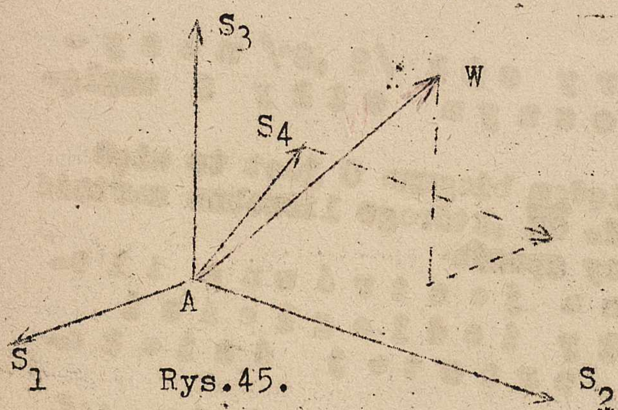
Twierdzenie. Moment statyczny wypadkowej układu sił, mających wspólny punkt zaczepienia, względem dowolnego bieguna jest geometryczną sumą momentów statycznych sił składowych względem tego bieguna.

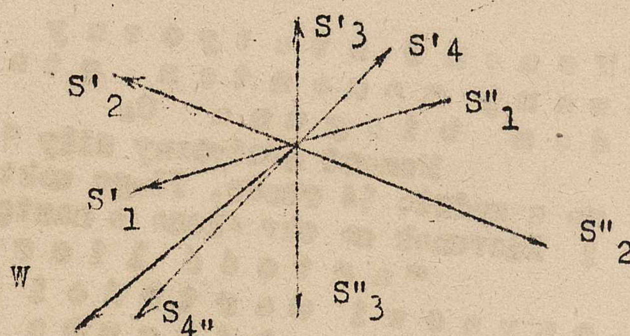
Twierdzenie to wynika bezpośrednio z twierdzenia o momencie statycznym pary wypadkowej,udowodnionego powyżej. Rzeczywiście niech np.będą dane cztery siły składowe $S_1, S_2, S_3, S_4$, działające na punkt A bryły. W jest ich wypadkową,a O punktem przestrzeni,obranym jako biegun rys 45/.



Rys.44






Rys.45.

Wtedy moment siły wypadkowej W względem tego bieguna O będzie momentem pary /W,W" /otrzymanym przy dodawaniu par:/$S_1$,$S_4$/ /$S_1$ $S_2$" /,/$S_3$,$S_3$" / iS/$_4$,S"$_4$,/,przyczem $S_1$,$S_2$,$S_3$,$S_4$ są dane siły składowe,a momenty tych par sił są momentami sił $S_1$,$S_2$,$S_3$ i $S_4$ względem bieguna O. cbdo.

IV. Dowolne siły,działajace na płaszczyznie.

I,Przekształcenie dowolnego układu sił na płaszczyznie.

Przypuśćmy,że na materjalna bryłę działa układ,składający się z n "sił,dowolnie skierowanych i znajdujących się w jednej płaszczyznie działania /46/.

Z poczatku dodamy pierwsza siłę do drugiej,ich wypadkowa złożymy z trzecia siła,otrzymana wypadkowa z czwartą siłą,i.td stosujac twierdzenie o równoległoboku sił lub o składaniu dwóch sił równoległych / patrz rozdział II. § I i § 3,rozdział III § I./

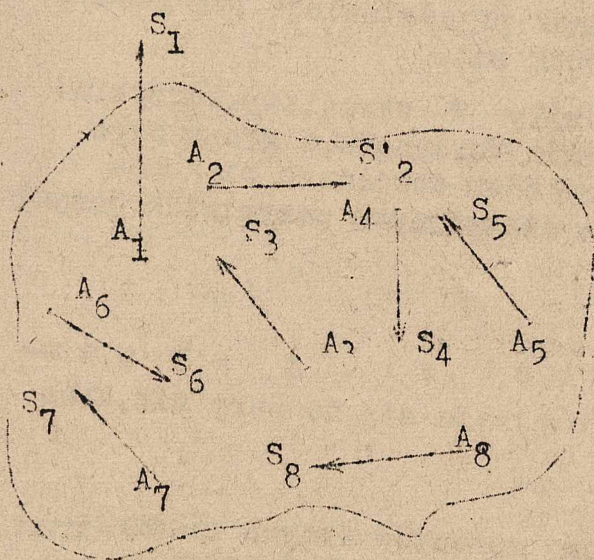
Postępujac w ten sposób otrzymamy albo wypadkową danych sił albo przejdziemy do jednego z nastepujacych wypadków:

Wypadek pierwszy: otrzymaliśmy wypadkową $W_k$ dla k sił,przyczem k < n-1,i pozostałe n-k sił: $S_k$+1,$S_k$+2,..... .....$S_n$ które wszystkie sa równe,co do liczebnej wartosci,równoległe i przeciwnie skierowane do siły $W_k$.

Składajac wtedy siły $S_k$+1,$S_{k+2}$,......$S_n$,otrzymamy ich wypadkowa,która złożymy z siła $W_k$w rezultacie będziemy mieli wypadkową W wszystkich "n" danych sił składowych.

Wypadek drugi: otrzymaliśmy wypadkowa n-1 sił $W_{n-1}$,i ostatnia z danych sił $S_n$ jest równa co do liczebnej wartości $W_{n-1}$ i skierowana w stronę przeciwna wzdłuż prostej dzia-

łania, równoległej lub wspólnej z prostą działania siły $W_{n-1}$.




Rys.46.

Jeżeli proste działania sił $W_{n-1}$ i $S_n$ są równoległe, to w rezultacie otrzymamy parę sił, równoważną danemu układowi sił.-

Jeżeli zaś wspólne, to dany układ "n" sił będzie w stanie równowagi.

Kiedy więc na bryłę materjalną działa układ "n" sił dowolnie skierowanych w jednej płaszczyznie działania, to zawsze możemy siły tego układu sprowadzić albo do jednej siły wypadkowej, bo do pary sił, albo wreszcie siły te będą się równoważyły.

Oczywiście, że ostateczny rezultat przekształcania układu sił nie zależy od porządku składania sił układu.

Z tego co było powiedziane łatwo wyprowadzimy sposoby składania sił, działających w jednej płaszczyznie, zarówno za pomocą w i e l o b o k u s i ł i za pomocą r z u t ó w s i ł n a o s i e w s p ó ł r z ę d n y c h.

Zrobimy przedtem następującą uwagę, w rozdziałach II i III-cim udowodniliśmy szereg twierdzeń Varignona o momentach sił, działających na jednej płaszczyznie. Zestawiając te twierdzenia razem / mianowicie twierdzenia: rozdział II / §§1, 3 4 tw. V/ VI: rozdział III § 2 /i biorąc pod uwagę, że każdy płaski układ sił sprowadza się, albo do siły /mogącej być równa zeru/, albo do pary sił, dojdziemy do twierdzenia V a r i g n o n a w p o s t a c i o g ó l n e j.

<u>Twierdzenie</u>. M o m e n t w y p a d k o w y s i ł y, a l b o w y p a d k o w e j p a r y s i ł d o w o l n e g o p ł a s k i e g o u k ł a d u s i ł w z g l ę d e m d o w o l n e g o b i e g u n a o b r a n e g o w t e j p ł a s z c z y z n i e, r ó w n a s i ę s u m i e a l g e b r a i c z n e j m o m e n t ó w s i ł s k ł a d o w y c h w z g l ę d e m t e g o ż b i e g u n a.

S p o s ó b p i e r w s z y - S p o s ó b w i e l o b o k u s i ł.

Zbudujemy z d a n y c h sił układu wielobok sił:Poszczegól ne kątytego wieloboku mogą być równe $0^o$ i $180^o$ ,a poszczególne boki jego mogą się przecinać.

W y p a d e k p i e r w s z y . W i e l o b o k s i ł n i e j e s t z a m k n i ę t y . Wtedy siły układu posiadają siłę wypadkową W .Jej liczbowa wielkość i kierunek przedstawiają się geometrycznie za pomocą zamykającej wielobok sił.

Prosta działania wypadkowej siły W określimy,korzystając z tylko co udowodnionego twierdzenia Varignona,a głoszącego że moment statyczny siły wypadkowej względem dowolnego biegunarówna się algebraicznej sumiemomentów statycznych wszystkich danych sił względem tegoż bieguna.

Wypadek d r u g i. W i e l o b o k s i ł j e s t z a m k n i ę t y. Wtedy siły układu sprowadzają się do pary sił,albo są w równowadze.

Znajdujemy algebraiczne sumy momentów danych siłwzględem dowolnego bieguna,obranego na płaszczyznie ich działania:

Jeżeli ta suma nie jest równa zeru,to siły układów sprowadzają się do p a r y s i ł:

J e ż e l i z a ś ta s u m a r ó w n a j e s t z e r u,t o s i ł y u k ł a d u s ą w r ó w n o w a d z e,

S p o s ó b d r u g i .S p o s ó b r z u t ó w s i ł n a o s i e w s p ó ł r z ę d n e ( s p o s ó b a n a l i t y c z n y.)

Oznaczymy przez $/ X_1, Y_1/, /X_2, Y_2/, / X_3, Y_3/, \ldots / X_n, Y_n/$. Spółrzędne prostopadłe Kartezjusza punktów zaczepienia sił układu $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$,a rzuty tych sił na osie współrzędnychodpowiednie przez $X_1, Y_1, X_3, Y_i, \ldots, X_n Y_n$.

W y p a d e k p i e r w s z y.

Sum algebraiczne rzutów sił składowych układu $\sum_{i=1}^{n} X_i$ i $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ nie są jednocześnie równe zeru,Wtedy istnieje w y p a d k o w a s i ł a W ;,rzuty jej na osie współrzędnych oznaczamy przez X i Y.

Dla wyznaczenia liczbowej wartości tej wypadkowej W mamy wzory:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_1 \text{ i } Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ skąd}$$

$W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ i $\cos / W,X / = \frac{X}{W}$ , $\cos / W,Y / = \frac{Y}{W}$

Aby określić prostą działania siły wypadkowej W, znajdziemy jeden z punktów tej prostej, mianowicie ten, który znajduje się na prostej, przechodzącej przez początek współrzędnych, prostopadłej do prostej działania siły W; oznaczymy współrzędną tego punktu przez /x,y /. Sumę algebraiczną momentów sił względem początku współrzędnych oznaczymy przez M, wtedy:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} / X_i y_i - Y_i x_i /$$

Dla wyznaczenia x i y mamy następujące dwa równania:

$$Xy - Yx = M \quad \text{i} \quad Xx + Yy = 0 \ :$$

Pierwsze z nich wyraża, że moment statyczny siły wypadkowej równa się algebraicznej sumie momentów statycznych sił składowych, a drugie - warunek wyżej wspomnianych prostopadłości prostych.

Rozwiązując te równania względem x i y znajdujemy:

$$x = -\frac{MY}{W^2} \qquad y = \frac{MX}{W^2}$$

W y p a d e k  d r u g i . Sumy algebraiczne rzutów sił składowych układu:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \ ,$$

Ale algebraiczna suma momentów sił składowych

$$M = \sum_{i=1}^{n} / X_i y_i - Y_i x_i / \neq 0$$

W tym wypadku siły układu sprowadzają się do pary s i ł której moment statyczny jest

$$M = \sum_{i=1}^{n} / X_i y_i - Y_i x_i / .$$

W szczególnym wypadku, kiedy siły układu są wzajemnie równoległe oznaczymy przez $\alpha$ kąt, który tworzy w dodatnim kierunku osi współrzędnych O X kierunek jednej z sił układu, wartości której przypisaliśmy znak "+" /patrz rozdz. II, § 5 wypadek drugi / .

Wtedy rzuty sił układu będą

$$X_i = S_i \cos\alpha, \ Y_i = S_i \sin\alpha, \ldots\ldots\ldots X_n = S_n \cos\alpha,$$

$$Y_i = S_i \sin\alpha, \ldots\ldots\ldots, X_n = S_n \cos\alpha, \ Y_n = S_n \sin\alpha,$$

i algebraiczna suma momentów sił składowych układu:

$$M = \cos\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i y_i - \sin\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i x_i ,$$

to wyrażenie nie równa się zeru i może służyć do oblicenia momentów statycznych pary sił.

W y p a d e k   t r z e c i .

Algebraiczna suma rzutów sił składowych układu:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

i algebraiczna suma momentów sił składowych,

$$M = \sum_{i=1}^{n} / X_i y_i - Y_i x_i / = 0.$$

W tym wypadku siły układu znajdują się w r ó w n o w a d z e.

W szczególnym wypadku, kiedy siły układu są wzajemnie równoległe, oznaczymy znowu przez $\alpha$ ten kąt, co w poprzednim wypadku, wtedy otrzymamy :

$$\cos\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i = 0 , \quad \sin\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i = 0 \quad i$$

$$M = \cos\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i y_i - \sin\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i x_i = 0 ,$$

zamiast pierwszych dwóch równań mamy jedno: $\sum_{i=1}^{n} S_i = 0$.

Z tych znowu widzimy, że równoległe siły, znajdujące się w stanie równowagi, po obrocie ich w jedną i tą samą stronę dookoła punktów ich zaczepienia o jeden i ten sam kąt, zwykle w stanie równowagi nie pozostaną.

Dla tego, aby te siły pozostały w stanie równowagi przy dowolnym kącie obrotu dookoła ich punktów taczepienia, a więc i przy kacie $\alpha$ jest koniecznym i wystarczającym, aby:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i x_i = 0$$

W tym wypadku, kiedy te trzy warunki są spełnione równowagę nazywamy a s t a t y c z n ą .

Zauważymy,że w dwóch ostatnich wypadkach algebraiczna suma momentów sił składowych układu nie zależy od wyboru bieguna.

Rzeczywiście oznacajac prez / $X_o$ $Y_o$ / współrzędnie bieguna dla momentu statycznego siły $S_i$ względem tego bieguna będzimy mili wyrażenie:

$$X_i / y_i - y_o / - Y_i / x_i - x_o / ---$$

a algebraiczna suma momentów sił składowych:

$$M = \sum_{i=1}^{n} X_i / y_i - y_o / - Y_i / x_i - x_o / = \sum_{i=1}^{n} / X_i y_i - Y_i x_i / -$$

$$-y_o \sum_{i=1}^{n} X_i + x_o \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Stąd wnioskujemy,że w wypadku drugim i trzecim mamy:

$$M = \sum_{i=1}^{n} X_i / y_i - y_o / - Y_i / x_i - x_o / = \sum_{i=1}^{n} / X_i y_i - Y_i x_i /,$$

ponieważ

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0.$$

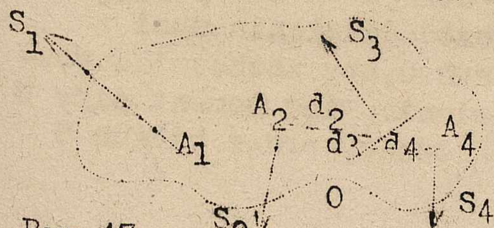
## § 2. Rownowaga dźwigni.

Jakoprzykład układu sił działajacych w jednej płaszczyznie rozpatrzymy równowagę dzwigni.

Dźwignią nazywamy bryłę materjalną obracającą się dookoła nieruchomej osi pod działaniem sił,działających w płaszczyznie prostopadłej do tej osi.Zastosujemy twierdzenie Varignona do zagadnienia o równowadze dźwigni.

Przypuśćmy,że mamy dźwignięz osią,prostopadłą do płaszczyzny rysunku i przecinajacą tę płaszczyznę w punkcie O.Niech $S_1$, $S_2$, $S_3$ i $S_4$ są siły,działające w tej płaszczyznie na dźwignię /rys.47/,a W- ich wypadkowa /w założeniu,że takowa istnieje/.

Żeby dźwignia znajdowała się w stanie równowagi,musi prosta działania wypadkowej W przejść przez punkt O.Jeżeli ta prosta nie przechodziprzez punkt O,to dźwignia w stanie równowagi nie będzie,lecz będzie się obracać pod działaniem siły W w tą lub inną stronę dookoła punktu O.



Rys.47.

Wyrazimy analitycznie warunek, że siła W przechodzi prez p. O. Jeżeli przyjmiemy ten punkt za biegun to musi być spełniony warunek: M /W/ = 0.

Ale W jest siłą wypadkową a na zasadzie twierdzenia Varignona moment tej siły W równa się algebraicznej sumie momentów sił składowych.

$$M/W/ = M/S_1/ + M/S_2/ + M/S_3/ + M/S_4/,$$

więc poprzedni warunek M /W/ = 0 przedstawi się tak:

$$M/S_1/ + M/S_2/ + M/S_3/ + M/S_4/ = 0, \text{ t.j.}$$

d l a r ó w n o w a g i d ź w i g n i j e s t n i e z b ę d n e, a b y a l g e b r a i c z n a s u m a m o m e n t ó w s i ł c z y n n y c h b y ł a r ó w n a z e r u.

Otrzymaliśmy więc najogólniejszy wzór, wyrażający warunek równowagi dźwigni.

Zastosujemy ten wzór do szczególnego wypadku sił naszego rysun. 47, wtedy będziemy mieli:

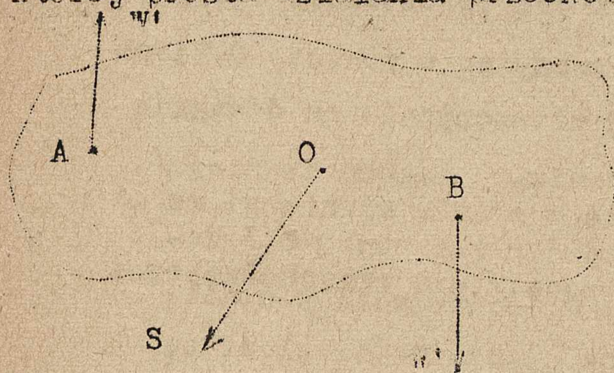
$$S_1d_1 - S_2d_2 - S_3d_3 + S_4d_4 = 0 \text{ czyli}$$

$$S_1d_1 + S_4d_4 = S_2d_2 + S_3d_3.$$

Widzimy więc, że s u m a m o m e n t ó w s i ł o b r a c a j ą c y c h d ź w i g n i ę w j e d n ą s t r o n ę, r ó w n a s i ę s u m i e m o m e n t ó w s i ł o b r a c a j ą c y c h d ź w i g n i ę w d r u g ą s t r o n ę.

Zrobiliśmy przypuszczenie, że siły $S_1, S_2, S_3$, i $S_4$ posiadają wypadkową W, ale może się zdarzyć, że siły są równoważne parze sił /W', W"/,

aby dowieść, że warunek równowagi dźwigni i w tym wypadku pozostaje w sile dodajemy do układu sił czynnych jaką bądź siłę S, której prosta działania przechodzi przez nieruchomą oś dźwigni.




Rys. 48.

Na zasadzie 5-go prawa statyki /rozdział I/ działanie pary /W', W" /na bryłę materjalną przez to nie ulegnie zmianie.

Składamy siły S i W', otrzymana wypadkową złożymy z siłą W" /rys 48 /. otrzymamy wtedy siłę W której prosta działania musi przejść przez biegun O, aby zachodziła równowaga dźwigni. Więc moment siły W jako przechodzący przez biegun O musi być równy [illegible] /W/ = 0.

Z drugiej strony moment siły W jako wypadkowy, musi być równy algebraicznej sumie momentów sił składowych, t.j.

$$M/W/ = \sum_{i=1}^{i=1} M/S_i/ + M/S/.$$

Ale M/S/ jako moment siły przechodzącej przez biegun, jest równy zeru. Dla tego mamy, że:

$$M/W/ = \sum_{i=1}^{n} M/S_i/ = 0 = M/W',W''/.$$

Warunek równowagi dźwigni i w tym wypadku pozostaje więc w sile: a l g e b r a i c z n a s u m a m o m e n t ó w s i ł c z y n n y c h m u s i b y ć r ó w n a z e r u.

## V. Moment statyczny siły względem prostej i jego własności.

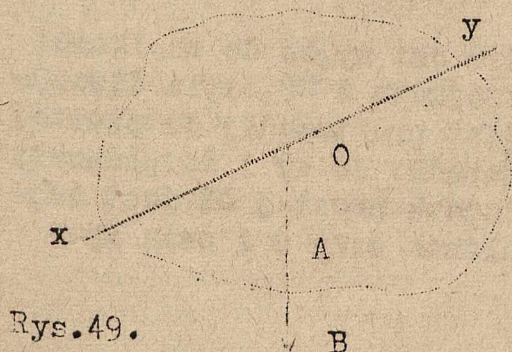
### 1. Moment statyczny względem osi /prostej/.

Gdy bryła materialna posiada nieruchomą oś, to pod działaniem siły, może być w stanie równowagi tylko w następujących dwóch wypadkach:

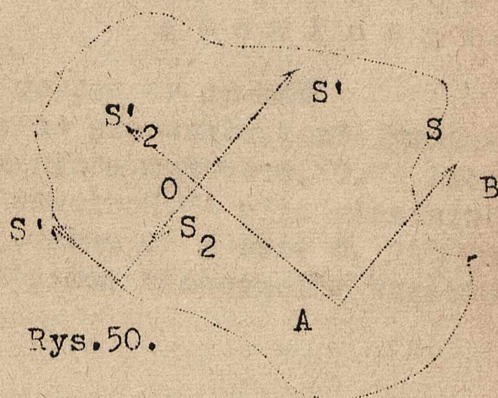
1/Gdy prosta działania siły przecina oś bryły materialnej, - co jest zupełnie oczywiste, ponieważ siła zrównoważy się siłą /rys 49/ odporową osi bryły materialnej; i

2/gdy prosta działania siły jest równoległą do osi bryły materialnej /rys 50/

Rzeczywiście, zamieniając daną siłę S przez siłę $S_1$, równą, co do wielkości liczebnej, równoległą do siły S i działającą na punkt O osi / AO-xy / i parę sił /$S,S_2$/, a następnie obracając ramię OA pary o kąt $90^0$ dookoła jej końca O, otrzymamy wzamian siły S trzy jej równoważne siły: $S_1$, $S_2'$ i S'.



Rys.49.



Rys.50.

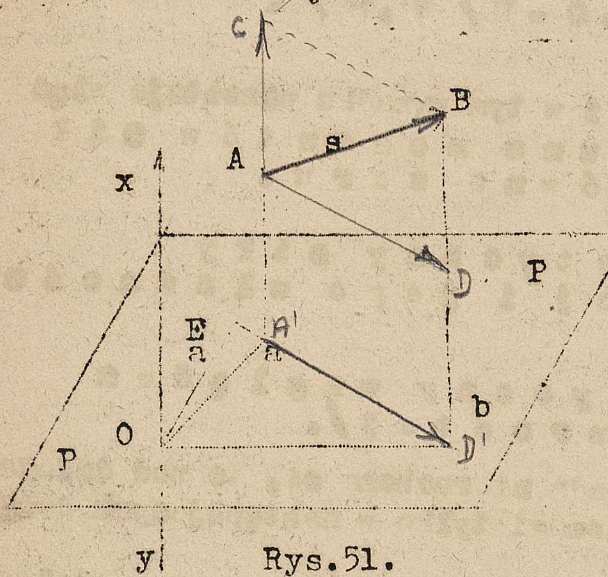
Oczywiście,że te ostatnie trzy siły równoważą się z siłami odporowymi osi bryły materialnej /patrz rozdz.I-y,piąte prawo statyki /.

W obu tych wypadkach równowagi siła,działająca na bryłę materialną, z n a j d u j e  s i ę  w  j e d n e j  p ł a s z c z y ź n i e  z  o s i ą  b r y ł y .

Niech teraz siła S  n i e  l e ż y  w  j e d n e j  p ł a s z c z y ź n i e  z osią xy bryły /rys.51 /.

Rozłożymy ją na dwie składowe AC,równoległą do osi xy, i AD prostopadłą do AC;

siła AC na zasadzie wyżej powiedzianego,zrównoważy się siłą odporową osi xy.



Rys.51.

Przeprowadzimy przez siłę AD płaszczyznę P,prostopadle do osi xy, i w punkcie przecięcia się O przyłożymy dwie siły OF i OG,wzajemnie równoważące się,równe co do wielkości liczebnej i równoległe do siły AD.

Możemy wtedy powiedzieć,że siła S w AB wywiera na bryłę materialną ten sam skutek,co i para sił AD i OF,ponieważ siła OG zrównoważy się siłą odporową osi xy.

Te okoliczności przyprowadzają nas do pojęcia  m o m e n t u  s t a t y c z n e g o  s i ł y  w z g l ę d e m  p r o s t e j ,  c z y l i  o s i .

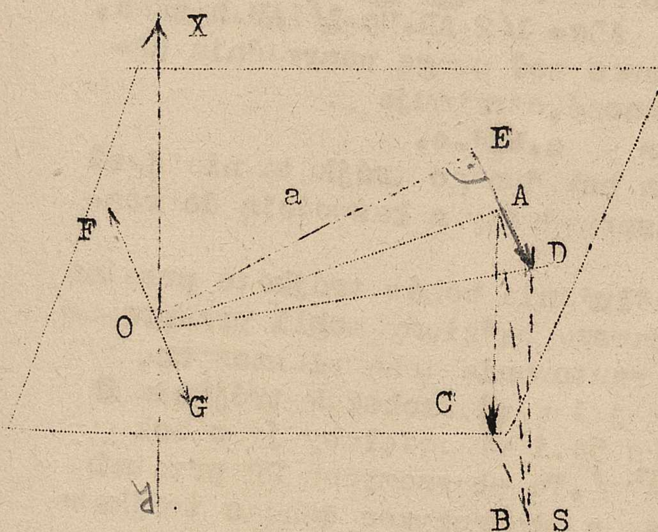
Osi momentu przypisujemy pewien kierunek,np.o d y ku x rys.51 / .

M o m e n t e m  s t a t y c z n y m  s i ł y  S  w z g l ę d e m  o s i  xy  n a z y w a m y  m o m e n t  s t a t y c z n y  p a r y  s i ł  /AD,OF /, k t ó r e g o  w a r t o ś c i  p r z y p i s u j e m y  z n a k "+", j e ż e l i  o n  j e s t  s k i e r o w a n y  w  t ę  s a m ą  s t r o n ę  c o  i  o ś  xy,i  z n a k -  j e ż e l i  j e s t  o n  s k i e r o w a n y  w  s t r o n ę  p r z e c i w n ą .

Moment statyczny siły S względem osi xy,co do wielkości bezwzględnej,równa się podwójnemu polu trójkąta A DO,czyli iloczynowi AD.OE,przyczym odcinek prostej OE jest prostopadły do prostej działania siły AD.Ponieważ OE jest prostopadłe do xy i do płaszczyzny CAD ,a więc i do prostej AB,to ten odcinek prostej OE jest najkrótszą odległością pomiędzy prostą dzaałania siły S i osią xy.

Otrzymujemy wtedy następujące o k r e ś l e n i e m o m e n t u s i ł y w z g l ę d e m o s i .

M o m e n t s t a t y c z n y s i ł y w z g l ę d e m o s i r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i z r z u t ó w s i ł y n a p ł a s z c z y z n ę , p r o s t o p a d ł a d o o s i i n a j k r ó t s z e j o d l e g ł o ś c i p o m i ę d z y p r o s t ą d z i a ł a n i a s i ł y i o s i a /rys.51 i 52/:




Rys.52.

Ten iloczyn bierzemy,ze znakie "+",jeżeli patrzący znajdujący się na płaszczyźnie PP,i mający oś xy przechodzącą od nóg do głowy,widzi siłę S skierowaną od strony lewej ku prawej /wg wskazówki zegara/,i ze znakiem "-" w wypadku przeciwnym.

Wielkość liczbową tego iloczynu odcinamy na osi od dowolnego punktu w tę lub inna stronę,w zależności od znaku,na rysunku 52, moment statyczny siły S = AB względem osi xy równa się:
+ OE.ab = + AB.d=+2.pole △ Oab.

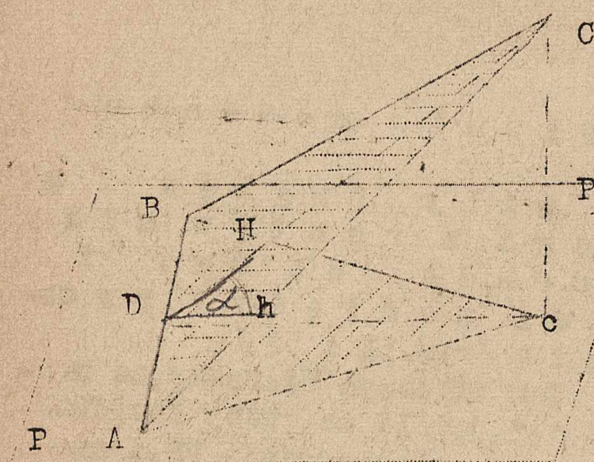
Moment statyczny siły względem osi jest równy 0 /zeru/ tylko w tym wypadku,kiedy prosta działania siły albo przecina oś /wtedy najkrótsza odległość OE jest równa zeru/,albo jest,do niej równoległa /wtedy rzut siły ab jest równy zeru/,t.j.tylko w tym wypadku,kiedy siła znajduje się w jednej płaszczyźnie z osią.

Udowodnimy teraz twierdzenie,dotyczące związku,jaki istnieje pomiędzy momentem statycznym względem osi i momentem statycznym względem bieguna obranego dowolnie dla tej osi,to twierdzenie jest oparte na następującym twierdzeniu geometrycznym.

P o l e r z u t u t r ó j k a t a n a p ł a s z c z y z n ę r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i z p o l a t e g o t r ó j k a t a i cosinusa k a t a p o m i ę d z y tą p ł a s z c z y z n a i p ł a s z c z y z n a t r ó j k ą t a .

Rozpatrzmy z początku szczególny wypadek,kiedy jeden z boków trójkata jest równoległy do płaszczyzny,na którą rzutujemy dany trójkąt.Możemy wtedy przeprowadzić płaszczyznę przez ten bok, równolegle do danej płaszczyzny,i rozpatrzyć rzut trójkąta na tę nowa płaszczyznę,zamiast na dana.

Na rys.53 mamy trójkat ABC,którego bok AB jest równoległy do danej płaszczyzny rzutowania,przez ten bok AB przeprowadziliśmy płaszczyznę PP równoległe do danej , i na nia rzutowaliśmy trójkąt ABC,wtedy otrzymaliśmy na płaszczyźnie PP,trójkąt ABc ,będący rzutem trójkata ABC.Oznaczymy przez $\alpha$ kat pomiędzy płaszczyzną




Rys.53.

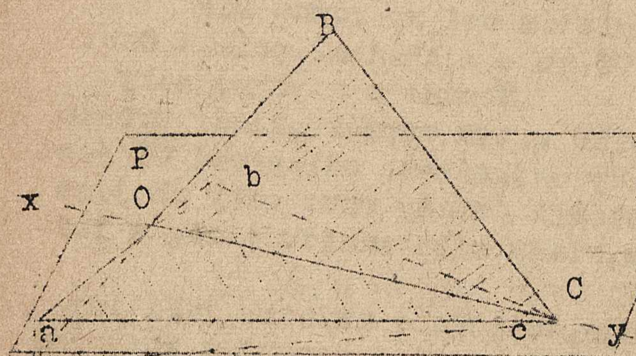
danego trójkąta ABC i płaszczyzną rzutowania PP, przez CD =H wysokość danego trójkąta, a przez cD =h wysokość trójkąta ABc, otrzymanego przez rzutowanie danego trójkąta ABC na płaszczyznę PP. Wtedy będziemy mieli zależność: h=H.cos∝.

Ale wiemy, że pole △ ABC= = 1/2 AB.DC=1/2 AB .H i pole △ ABc= 1/2 AB.Dc=1/2AB.h skąd, biorąc pod uwagę poprzednią zależność, otrzymujemy:

pole △ ABc=/ pole △ ABC / .cos ∝ c.b.d.o.

Ogólny wypadek, kiedy ani jeden bok danego trójkąta nie jest równoległy do płaszczyzny rzutowania, sprawdzimy z łatwością do rozpatrzonego już szczególnego wypadku.

W rozpatrywanym wypadku przedłużenie boków trójkąta przetną płaszczyznę rzutowania, dla tego też zawsze będziemy mogli przeprowadzić równolegle do danej płaszczyzny rzutowania taką płaszczyznę /PP-rys.54 /., któraby przeszła przez jeden wierzchołek trójkąta C rys 54.i przecięłaby jego bok /AB /. Ta płaszczyzna PP przetnie się z płaszczyzną danego trójkąta ABC wzdłuż prostej xy, dzieląc go na dwa trójkąty: BCO i ACO. Rzutując dany trójkąt na płaszczyznę PP otrzymamy jego rzut-trójkąt abc. Prosta xy przetnie go na dwa trójkąty boc i aco, będące odpowiednio rzutami trójkątów BCO i ACO. Ponieważ wspólny bok CO tych trójkątów leży na płaszczyźnie PP, to możemy zastosować do nich tylko co udowodnione twierdzenie, wtedy otrzymamy:




Rys.54.

Rys.54.

pole trójkąta boc=/ pole trójkąta BCO /.cos∝ i pole △ aco= =/ pole trójkąta ACO /.cos ∝, przyczym ∝ jest to kąt pomiędzy płaszczyzną danego trójkąta ABC i płaszczyzną rzutowania PP.

Składając te równości stronami otrzymamy:

pole △ abc= /pole △ BCO+pole △ ACO /.cos∝ =/pole ABC /. .cos ∝ c.b.d.o.

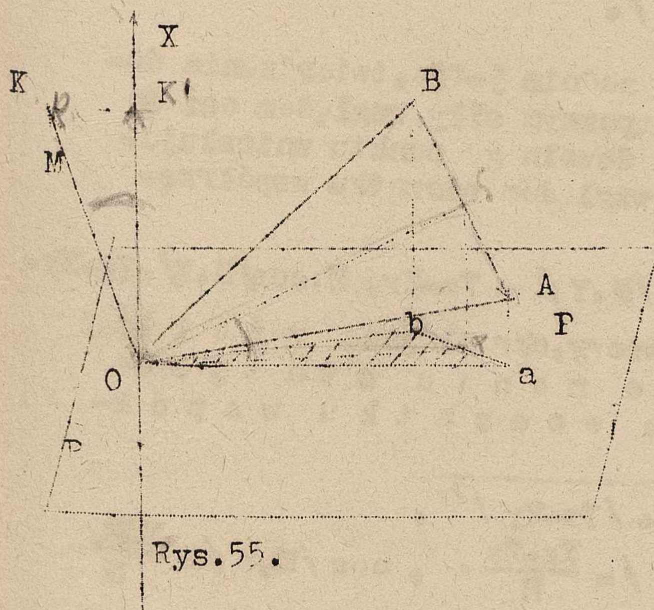
Teraz możemy udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie: M o m e n t s t a t y c z n y s i ł y w z g l ę d e m o s i r ó w n a s i ę r z u t o w i n a t ę o ś m o m e n t u s t a t y c z n e g o s i ł y w z g l ę d e m b i e g u n a d o w o l n i e o b r a n e g o n a t e j o s i.

Wiemy, że jeżeli oznaczymy przez $M=\overline{OK}$ moment statyczny danej siły S względem bieguna O, to będziemy mieli: $M=\overline{OK}=2.$pole △ AOB.

Z drugiej zaś strony mamy, że kąt KOX jest równy kątowi pomiędzy płaszczyzną PP i płaszczyzną trójkąta OAB. Stąd wnioskujemy, że iloczyn OK.cos /KOX /= OK'= / 2 . pole △ AOB /.cos /KOx /równa się 2.pole △ aOb,

na zasadzie powyższego twierdzenia /rys.55 / .c.b.d.d.

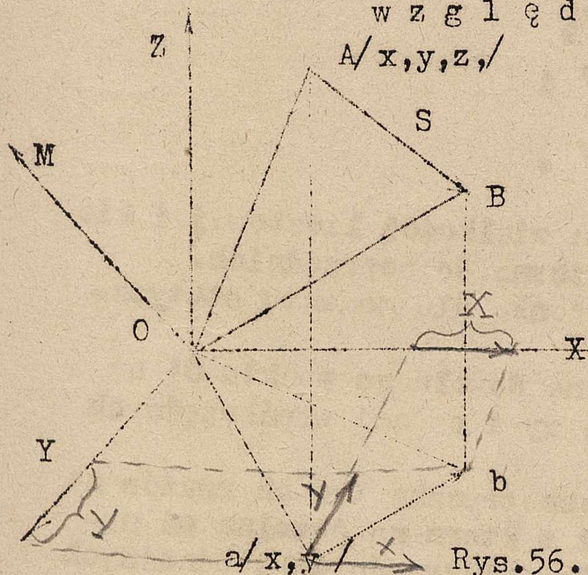


Rys.55.

Z tego twierdzenia, na zasadzie twierdzenia o momencie statycznym siły wypadkowej względem bieguna /rozdz III, §3 /otrzymujemy nowe twierdzenie.

Twierdzenie. Moment statyczny względem osi siły wypadkowej kilku sił działających na jeden punkt bryły materialnej, równa się sumie algebraicznej momentów statycznych sił składowych względem tej osi.

## 2. Wyrażenia analityczne momentu statycznego względem osi i względem punktu.



Rys.56.

Weźmy trzy wzajemnie prostopadłe osie współrzędnych: OX, OY, OZ, oznaczymy przez / x,y,z /współrzędne punktu zaczepienia siły S, a przez X, Y, Z jej rzuty na te osie /rys.56 /.

Dlatego, aby wyznaczyć moment statyczny siły S względem osi OZ, rzutujemy siłę $\overline{AB}=S$ na płaszczyznę YOY, otrzymujemy ab; współrzędne punktu a będą / x,y, /, a rzuty ab na osi OX i OY te same co i siły S t.j. X i Y ; tedy stosując do ab twierdzenie, udowodnione w końcu §2, rozdz.III otrzymamy:

$2.$pole △ $aOb=Y_x-X_y=M_{(}/S/.$

Wyrażenia dla dwóch innych momentów statycznych względem osi OX

i OY otrzymamy przez cykliczne przestawienie liter x,y,z, i X,Y,Z, będziemy wtedy mieli wzory

$$M_x/S/ = Zy-Yz, M_y/S/ = Xz-Zx \quad i \quad M_z/S/ = Yx-Xy.$$

Momenty statyczne siły S względem osi O' X',O'Y',O'Z', równoległych do osi współrzędnych i przechodzących przez punkt O', którego współrzędne są $/x_0, y_0, z_0/$ będą wyrażone następującymi wzorami:

$$M'_x/S/ = Z/y-y_0/-Y/z-z_0/, \quad M'_y/S/ = X/z-z_0/-Z/x-x_0/,$$
$$M'_z/S/ = Y/x-x_0/-X/y-y_0/.$$

Na zasadzie udowodnionego w poprzednim §-fie, twierdzenia dotyczącego związku pomiędzy momentem statycznym siły względem osi a momentem statycznym tejże siły względem dowolnego punktu wnioskujemy, że rzuty momentu statycznego siły S względem początku współrzędnych wyrażają się wzorami:

$$M.\cos/M.X/ = Zy-Yz, \quad M.\cos/M.Y/ = Xz-Zx, \quad M.\cos/M.Z/ = Yz-Xy.$$

Stąd otrzymujemy bezpośrednie wzory, określające w i e l k o ś ć l i c z b o w ą i k i e r u n e k m o m e n t u s t a t y c z n e g o M s i ł y S w z g l ę d e m p o c z ą t k u w s p ó ł r z ę d n y c h:

$$M = \sqrt{/Zy-Yz/^2 + /Xz-Zx/^2 + /Yx-Xy/^2},$$
$$\cos/M,X/ = \frac{Zy-Yz}{M}, \quad \cos/M,Y/ = \frac{Xz-Zx}{M}, \quad \cos/M,Z/ = \frac{Yx-Xy}{M}$$

Rzuty na osie współrzędnych momentu statycznego M' siły S względem dowolnego bieguna $O'/x_0, y_0, z_0/$ wyrażają się wzorami:

$$M'\cos/M'X/ = Z/y-y_0/-Y/z-z_0/;$$
$$M'\cos/M'Y/ = X/z-z_0/-Z/x-x_0/ \quad i$$
$$M'\cos/M'Z/ = Y/x-x_0/-X/y-y_0/.$$

Stąd możemy otrzymać dla określenia wielkości liczbowej i kierunku momentu statycznego M wzory analogiczne do poprzednich.

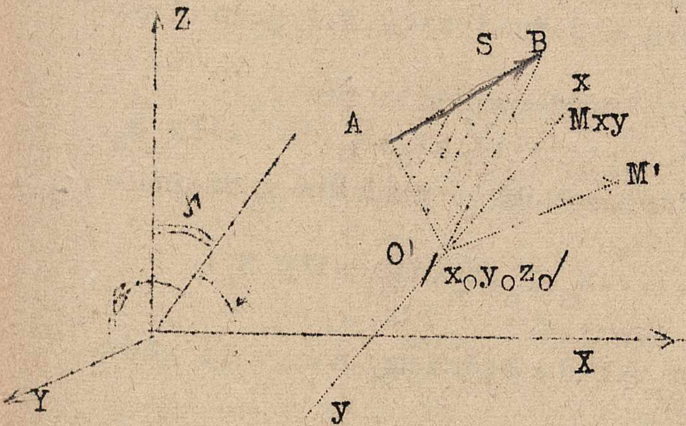
Na zakończenie podamy jeszcze wyrażenie dla momentu statycznego siły S względem dowolnej osi xy.

Oznaczymy przez $x_0, y_0, z_0$ współrzędne dowolnego punktu O' na osi xy, a przez $\alpha, \beta, \gamma$ kąty pomiędzy osią xy i osiami współrzędnych OX, OY, OZ.

Ponieważ każdy wektor jest sumą geometryczną trzech rzutów na osie współrzędnych, to aby wyznaczyć rzut wektora na dowolną oś musimy wziąć iloczyny z rzutów jego na osie współrzędnych i odnośnych cosinusów kątów, pomiędzy daną osią i osiami współrzędnych, i otrzyma-

na iloczyny złożyć. W danym wypadku, wektorem będzie moment statyczny M' siły S względem bieguna O' /$x_o$, $y_o$, $z_o$ /, a jego rzut na oś xy - poszukiwanym momentem statycznym M siły S względem tej osi, mianowicie:

$$M_{xy}/S/ = \left[Z/y-y_o/ - Y/z-z_o/\right].\cos\alpha + \left[X/z-z_o/ - Z/x-x_o/\right].\cos\beta + $$
$$+ \left[Y/x-x_o/ - X/y-y_o/\right].\cos\gamma \ /rys.57/.$$




Rys.57.

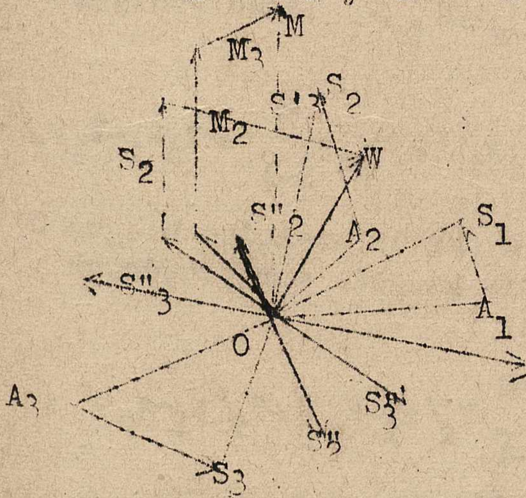
Ten wzór możemy napisać bezpośrednio posługując się znanym z geometrii analitycznej, wzorem na cos kąta pomiędzy dwiema prostymi:

$\cos/l_1 l'_1/ = \cos/l_1 X/.$
$.\cos/l'_1 X/ + \cos/l_1 Y/.$
$.\cos/l'_1 Y/ + \cos/l_1 Z/.$
$.\cos/l'_1 Z/.$

## VI. Dowolne siły w przestrzeni.

### §1. Rozważania wstępne.

Twierdzenie. Każdy układ sił działających na bryłę materialną, może być przekształcony na układ, złożony z jednej siły przechodzącej przez jeden punkt przestrzeni, i jednej pary sił.




Rys.58.

Wyobraźmy sobie, że na bryłę materialną działają siły: $S_1$, $S_2$, $S_3$ i.t.d., dowolnie skierowane w przestrzeni zaczepione w punktach $A_1$, $A_2$, $A_3$ i t.d..

Postąpimy z tymi siłami analogicznie do tego, jak uczyniliśmy w rozdz. III. §3, kiedy określaliśmy moment siły względem bieguna w przestrzeni, mianowicie obierzemy w przestrzeni dowolny punkt O' /rys.58/ /nieruchomo/ sztywnie związany z bryłą materialną, i przyłożymy do niego równolegle do siły $S_1$ dwie siły $S'_1$ i $S''_2$ wzajemnie równoważące,

i równe, co do wielkości liczebnej, sile $S_1$. Otrzymamy wtedy wzamian siły $S_1$ siłę $S'_1$ i parę sił $/S_1, S''_1/$, moment której oznaczymy przez $M_1$. Właśnie ten moment $M_1$ nazywaliśmy w rozdziale III, §3. momentem siły $S_1$ względem bieguna O' w przestrzeni.

Postępując kolejno analogicznie ze wszystkimi innymi siłami $S_2, S_3, \ldots, S_n$ naszego układu, otrzymamy pęk sił $S'_1, S'_2, S'_3$ i t.d. działających na punkt O' i szereg par sił $/S_1, S''_1/$, $/S_2, S''_2/$, $/S_3, S''_3/$ i t.d. o momentach statycznych $M_1, M_2, M_3, \ldots$, par sił składowych.

W rezultacie przekształcenia naszego układu sił, otrzymaliśmy równoważny układ sił, składający się z jednej siły W i jednej pary sił / W', W" /. c.b.d.o.

Oznaczymy rzuty sił danego układu odpowiednio przez: $X_1, Y_1, Z_1$ siły $S_1$; $X_2, Y_2, Z_2$, siły $S_2$; .....; $X_n, Y_n, Z_n$, dla siły $S_n$;

a prostopadłe współrzędne Kartezjańskie punktów zaczepienia sił odpowiednio przez:

$x_1, y_1, z_1$, siły $S_1$; $x_2, y_2, z_2$, siły $S_2$; ....... $x_n, y_n, z_n$, dla siły $S_n$.

Wprowadzimy następujące dwa terminy:

sumę geometryczną sił danego układu będziemy nazywali głównym wektorem sił.

Oznaczymy ten wektor przez $W_g$, a rzuty jego na osie współrzędnych przez $W_{gx}, W_{gy}, W_{gz}$. Wtedy będziemy mieć:

$$W_{gx} = \sum_{i=1}^{n} X_i \,,\quad W_{gy} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \,,\quad W_{gz} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad \ldots\ldots\ldots /1/.$$

Sumę geometryczną momentów sił składowych danego układu względem dowolnego bieguna będziemy nazywali g ł ó w n y m m o m e n t e m s t a t y c z n y m d a n y c h s i ł w z g l ę d e m t e g o b i e g u n a.

Oznaczymy przez $M_g$ główny moment statyczny sił danego układu względem początku współrzędnych, a przez $M_{gx}, M_{gy}, M_{gz}$, jego rzuty na osie współrzędnych. Wtedy będziemy mieli:

$$M_{gx} = \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/ \,;\quad M_{gy} = \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i/ \,;\quad M_{gz} = \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ \,..$$

Główny moment statyczny sił danego układu względem bieguna O' $/x_o, y_o, z_o/$ oznaczymy przez $M'_g$, a jego rzuty na osie współrzędnych przez $M'_{gx}, M'_{gz}, M'_{gy}$, wtedy będziemy mieli:

$$M'_{gx} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i /y_i - y_o/ - Y_i /z_i - z_o/ \,;\quad M'_{gy} = \sum_{i=1}^{i=n} X_i /z_i - z_o/ - Z_i /x_i - x_o/ \,;$$

$$M'_{gz} = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i /x_i - x_o/ - X_i /y_i - y_o/ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pierwszy z tych wzorów /3/, na zasadzie /1/ i 0 daje:

$$M'_{gx}=\sum_{i=1}^{n}/z_iy_i-y_iz_i/-\sum_{i=1}^{n}z_iy_o+\sum_{i=1}^{n}y_iz_o=M_{gx}-$$

$$-y_o\sum_{i=1}^{n}z_i+z_o\sum_{i=1}^{n}y_i=M_{gx}-y_oW_{gz}+z_oW_{gy}.$$

Analogicznie otrzymamy następne dwa wzory:

$$M'_{gy}=M_{gy}-z_oW_{gx}+x_oW_{gz}\ \text{i}$$

$$M'_{gz}=M_{gz}-x_oW_{gy}+y_oW_{gx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/4/.$$

Na zasadzie wzorów /4/ § 2, rozdział V wyrażenia:

$-y_oW_{gz}+z_oW_{gy}$, $-z_oW_{gx}+x_oW_{gz}$ i $-x_oW_{gy}+y_oW_{gx}$,

możemy rozpatrywać jako rzuty na osie współrzędnych momentu statycznego głównego wektora sił danego układu $W_g$ przeprowadzonego przez początek współrzędnych, względem bieguna O' / $x_o$, $y_o$, $z_o$ /. Oznaczymy ten moment przez $M_w$ a jego rzuty przez $M_{wx}$, $M_{wy}$ i $M_{wz}$ wtedy prawe części powyższych wzorów /4/ będą przedstawiały rzuty sumy geometrycznej dwóch momentów statycznych $M_g$ i $M_w$, mianowicie będziemy mieli:

$$M'_{gx}=M_{gx}+M_{wx},\ M'_{gy}=M_{gy}+M_{wy}\ \text{i}\ M'_{gz}=M_{gz}+M_{wz}\ldots/5/.$$

Z tych wzorów /5/ wnioskujemy, że główny moment statyczny sił danego układu względem bieguna O' / $x_o$, $y_o$, $z_o$ / równa się sumie geometrycznej dwóch momentów statycznych: głównego momentu statycznego sił układu względem początku współrzędnych i momentu statycznego głównego wektora sił układu, przeprowadzonego przez początek wspórzędnych względem bieguna O'.

Gdy g ł ó w n y w e k t o r u k ł a d u s i ł j e s t r ó w n y z e r u, to główny moment statyczny ich względem dowolnego bieguna, jak to widzimy z wzorów /5/ albo /4/ b ę d z i e s t a ł y m, mianowicie będziemy mieli:

$$M'_g=M_g,\ \text{czyli}\ M'_{gx}=M_{gx},\ M'_{gy}=M_{gy},\ M'_{gz}=M_{gz}.$$

Stąd wynika, że główny moment statyczny dwóch sił tworzących parę sił, względem dowolnego bieguna będzie stałym, równym co do kierunku i wartości liczbowej, momentowi tej pary sił.

Gdy główny moment statyczny sił układu nie jest równy zeru, to rzut głównego momentu statycznego sił układu względem dowolnego bieguna na oś, równoległą do głównego wektora sił, posiada wartość stałą.

Dla dowodu weźmiemy iloczyny z prawych części wzorów /4 / i odnośnych cosinusów kątów pomiędzy głównym wektorem $W_g$ sił układu i osiami współrzędnych, t.j.

$$\frac{W_{gx}}{W_g} \quad \frac{W_{gy}}{W_g} \quad \frac{W_{gz}}{W_g}$$

Otrzymane w ten sposób iloczyny dodamy, wtedy po zredukowaniu się wyrazów zawierających $x_o$, $y_o$ i $z_o$, otrzymamy równość:

$M'_g, \cos /M'_g W_g/ = M_g, \cos /M_g W_g/$ .................................. /5 /.

Patrz rozdział V. koniec §-fu 2-go/. c.b.d.d.

Udowodniliśmy, że każdy układ sił możemy przekształcić na równoważny układ składający się z jednej pary sił /W', W"/ i z jednej siły W.

Otóż ta siła W jest równa głównemu wektorowi sił układu $W_g$, ponieważ siła W jest wypadkową sił $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots, S'_n$, t.j. równa ich sumie geometrycznej albo, co jest to samo sumie geometrycznej danych sił $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$.

Dlatego też siła W jest niezależna od wyboru w przestrzeni punktu jej zaczepienia O', rzuty jej na osie współrzędnych wyrażają się wzorami /1 /.

Moment statyczny pary /W, W'/ jest równy głównemu momentowi statycznemu sił układu względem bieguna O', ponieważ para sił W', W" jest wypadkową par sił $/S_1, S''_1/$, $/S_2, S''_2/$ ... ..., $/S_n, S''_n/$, a więc jej moment statyczny równy sumie geometrycznej momentów statycznych tych par składowych, albo co jest to samo, sumie geometrycznych momentów statycznych sił układu $S_1, S_2, S_3, \ldots \ldots S_n$ względem bieguna O'.

Główny moment statyczny wogóle zależy od wyboru jego bieguna O', rzuty jego na osie współrzędnych wyrażają się wzorami /2 /, gdy biegun O' jest obrany w początku współrzędnych O, w wypadku przeciwnym wzorami /3 / lub /4 /.

Z wyżej powiedzianego wnioskujemy,że dwa układy sił będa równoważnymi , jeżeli ich główne wektory sił igłówne momenty statyczne względem tego samego bieguna będa sobie równe ,co do kierunku i wartości liczebnej.

Parę sił /W',W" / możemy zawsze przesunać w przestrzeni w ten sposób,aby jedna z jej sił np.,W" była przyłożoną w punkcie O,,wtedy składajac tę siłę W" z siła W,według prawa równoległoboku sił otzrymamy ich wypadkowa $W_1$.

W rezultacie mamy układ sił złożony z dwu sił W i $W_1$, równoważny do danego układu sił. możemy więc wysłowić następujace twierdzenie:

Twierdzenie. Każdy układ sił,działający na bryłę materjalną,może być przekształcony na równoważny układ,składający się z jednej siły i z jednej pary sił,albo na układ,składający się z dwóch sił,wogóle nie leżacych w jednej płaszczyznie.-

Takich przekształceń istnieje nieskończenie wiele,ponieważ punkt O' możemy brać dowolnie,oprócz tego możemy zamienić parę sił jej równoważna.-

## §.2. Wypadek równowagi sił układu.-

Twierdzenie. Aby układ sił,działających na bryłę materjalna,znajdował się w stanie równowagi,jest koniecznem i wystarczajacem,żeby główny wektor i główny moment statyczny sił tego układu był y równe zeru.

rzeczywiście,równowagi nie będziemy mieli,jeżeli główny wektor $W_g$ i główny moment $M_g$ nie sa jednocześnie równe zeru,ponieważ para sił nie może być zrównoważona jedną siła;

nie będziemy mieli równowagi rzeczywiście i wtedy,kiedy $W_g$ równa się 0, $M_g \neq 0$, albo kiedy $M_g = 0$, a $W_g \neq 0$.

Stąd wnioskujemy, że dla istnienia równowagi jest koniecznem i wystarczającem, aby jednocześnie zachodziły równości:

$W_g = 0$ i $M_g = 0$. C.B.d.d.

Pierwszy z tych dwóch warunków równowagi wyraża się trzema równaniami:

$$W_{gx}=0, W_{gy}=0, W_{gz}=0, \text{ albo : } \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /7/.$$

Drugi warunek równowagi $M_g = 0$ wyraża się też trzema równaniami:

$$M_{gx} = 0, \; M_{gy} = 0, \; M_{gz} = 0, \text{ albo}$$

$$\sum_{i=1}^{n} / Z_i y_i - Y_i z_i / = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i / = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i / \quad \ldots\ldots\ldots /8/.$$

Sześć równań /7/ i /8/ nazywamy r ó w n a n i a m i a n a l i t y c z n e m i r ó w n o w a g i s i ł u k ł a d u w p r z e s t r z e n i.

Te r ó w n a n i a m o ż e m y w y s ł o w i ć w t e n s p o s ó b :

S i ł y, p r z y ł o ż o n e d o b r y ł y m a t e r j a l n e j, s ą w r ó w n o w a d z e, g d y s u m y a l g e b r a i c z n e i c h z r u t ó w i s u m y a l g e b r a i c z n e i c h m o m e n t ó w s t a t y c z n y c h w z g l ę d e m t r z e c h o s i w s p ó ł r z ę d n y c h s ą r ó w n e z e r u w z g l ę d e m k a ż d e j o s i z o s o b n a.

Zastosujemy otrzymane równania równowagi /7/ i /8/ do szczególnego wypadku, kiedy w s z y s t k i e s i ł y u k ł a d u s ą w z a j e m n i e r ó w n o l e g ł e.
Przeprowadzimy przez początek współrzędnych O prostą xy /rys.59/, równolegle do sił danego układu i niech $\alpha, \beta, \gamma$ oznaczają kąty pomiędzy kierunkiem tej prostej xy i osiami współrzędnych OX, OY, OZ,

Siły danego układu $S_1, S_2, \ldots S_n$ będziemy liczyć za dodatnie lub ujemne w zależności od tego czy siła będzie skierowana w tę samą stronę co prosta xy, czy też w stronę przeciwną; wtedy rzuty tych sił wyrażają się następującemi wzorami:

$X_1 = S_1 \cos\alpha, Y_1 = S_1 \cos\beta, Z_1 = S_1 \cos\gamma,$

$X_2 = S_2 \cos\alpha, \ldots\ldots, Z_n\ S_n \cos\gamma.$

Wstawiając te wyrażenia w równania / 7/ i / 8 /, otrzymamy:

$$\cos\alpha\sum_{i=1}^{n} S_i = 0, \cos\beta\sum_{i=1}^{n} S_i = 0$$

$$\cos\gamma\sum_{i=1}^{n} S_i = 0 \text{ i } \cos\gamma\sum_{i=1}^{n} S_i y_i - \cos\beta\sum_{i=1}^{n} S_i z_i = 0$$

$$\cos\alpha\sum_{i=1}^{n} S_i z_i - \cos\gamma\sum_{i=1}^{n} S_i x_i = 0,$$

$$\cos\beta\sum_{i=1}^{n} S_i x_i - \cos\alpha\sum_{i=1}^{n} S_i y_i = 0.$$

Rys. 59.

Jeżeli ani jeden z cosinusów $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nie jest równy zeru, to po podzieleniu pierwszych trzech równań odpowiednio przez $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ż ostatnich trzezch odpowiednio przez iloczyny: $\cos\alpha$, $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, i $\cos\alpha$, $\cos\beta$, otrzymamy następujące równania dla rozpatrywanego wypadku:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 0 \text{ i } \frac{\sum_{i=1}^{n} S_1 x_1}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{\cos\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i z_i}{\cos\gamma} \ldots /9/$$

Jeżeli jeden z cosinusów jest równy zeru np., $\cos\gamma = 0$ to równania /9/ przyjma taka postać .

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 0 \text{ i } \sum_{i=1}^{n} S_i z_i = 0, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{\mathrm{sos}\,\beta} \ldots\ldots\ldots /10/$$

Jeżeli, wreszcie, dwa cosinusy sa równe zeru np. $\cos\beta = 0$ i $\cos\gamma = 0$, to zamiast równań /10 /, będziemy mieli równania:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 0 \text{ i } \sum_{i=1}^{n} S_i z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i y_i = 0.$$

Równowagę równoległych sił nazywamy **a s t a t y c z n ą** /patrz rozdział IV § I. /gdy poobrocie tych sił dookoła ich punktów zaczepienia o jeden i ten sam dowolny kąt siły pozostaną nadal w stanie równowagi.

Warunkikonieczne i wystarczające dla istnienia astatycznej równowagiwyraża się zapomoca równań:

n

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 0 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} S_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i z_i = 0.$$

W dopiero co rozpatrzonym wypadku mamy nie sześć równań równowagi,lecz tylko trzy równania.

Zbadamy teraz jeszcze kilka innych wypadków równowagi kiedy otrzymujemy nie wszystkie sześć,lecz mniej równań równowagi,ponieważ reszta równań spełniają się automatycznie.

W y p a d e k I. W s z y s t k i e s i ł y d a n e g o u k ł a d u d z i a ł a j ą w j e d n e j p ł a s z c z y z n i e.

Przyjmijmy płaszczyznę działania sił za płaszczyznę współrzędnych XOY,wtedy rzuty wszystkich sił układu na oś OZ będą równe zeru,a oprócz tego współrzędna "z" ich punktów zaczepienia też będzie zerem,dlatego też trzy równania z sześciu równań /7/ i /8/ spełnia się automatycznie,jako tożsamości i otrzymamy tylko trzy równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ = 0.$$

To są te same równania,które otrzymaliśmy wyżej w § I. rozdziału IV,kiedy rozpatrywaliśmy płaskie układy sił.Zmiana znaku w trzecim równaniu wynikła z tej przyczyny,że dla osi współrzędnych na płaszczyźnie kierunek obrotu uważamy za dodatni wtedy,kiedy on się zozpatruje od dodatniej osi OX ku dodatniej osi OY a dla osi współrzędnych w przestrzeni odwrotnie.

W y p a d e k II. W s z y s t k i e s i ł y d a n e g o u k ł a d u d z i a ł a j ą n a j e d e n i t e n s a m p u n k t.

Przyjmijmy ten punkt z a początek współrzędnych O,wtedy ponieważ możemy rozpatrywać ten początek współrzędnych jako punkt zaczepienia wszystkich sił układu współrzędne x,y,z,punktów zaczepienia sił układu będą równe zeru.Równania /8/ spełnią się automatycznie jako zwykłe równości,i my otrzymamy tylko trzy równania równowagi.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0.$$

To są te same równania,które już raz otrzymaliśmy w §2 rozdziału III,kiedy rozpatrywaliśmy układy sił o prostych działaniach przecinających się w jednym punkcie.

Wypadek III, Wszystkie siły danego układu sa równoległe do jednej płaszczyzny, ale nie sa zawarte w jednej płaszczyźnie.

Przypuśćmy, że siły układu sa równoległe do płaszczyzny współrzędnych XOY, wtedy rzuty tych sił na oś OZ będa równe zeru: $Z_i = 0$, otrzymujemy wtedy pięć równań równowagi:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i z_i = 0 \text{ i } \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ = 0.$$

## § 3. Wypadek jednej wypadkowej ~~pary sił~~.

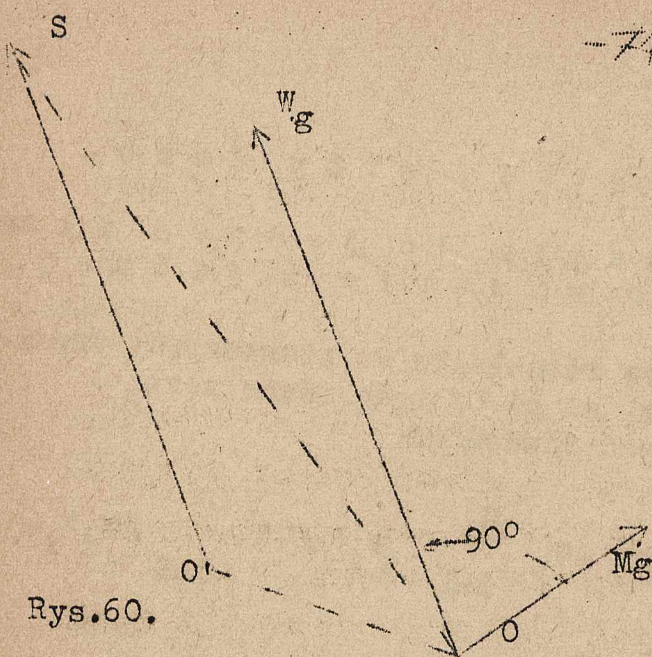
Twierdzenie. Aby układ sił działających na bryłę materjalna, sprowadzał się do jednej siły wypadkowej, potrzeba i wystarcza, żeby główny wektor tych sił nie był równy zeru, zaś główny moment statyczny tychże sił był albo równy zeru, albo prostopadły do głównego wektora sił.

Przypuśćmy, że przekształciliśmy dany układ sił na układ równoważny złożony z głównego wektora sił $W_g$ i pary sił o momencie statycznym, równym głównemu momentowi statycznemu $M_g$.

Udowodnimy spoczatku konieczność warunków, zawartych w twierdzeniu:

Wyobraźmy więc sobie, że powyższy układ sprowadza się do jednej siły S, przyłożonej do punktu O' bryły materialnej /Rys.60/. w §I. tego rozdziału powiedzieliśmy, że dwa układy są wtedy tylko równoważne, gdy ich główne wektory i główne momenty statyczne względem tegoż samego bieguna sa sobie równe, co do wartości liczebnej i co do kierunku.

W wypadku obecnym jeden układ składa się z jednej tylko siły S dlatego siła S musi być równą co

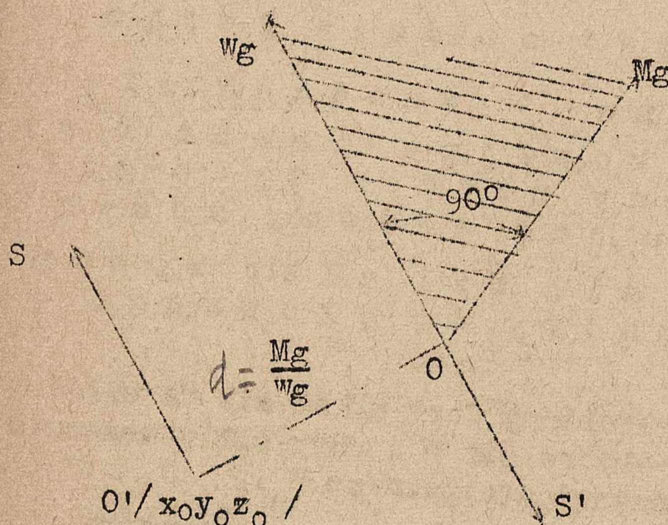



Rys.60.

wartości liczebnej i kierunku, głównemu wektorowi $W_g$, a jej moment statyczny względem początku współrzędnych O musi być równym co do wartości liczebnej i kierunku, głównemu momentowi $M_g$.

Stąd wynika, że gdy punkt O' znajduje się w początku współrzędnych O, to musi zachodzić równość: $M_g = 0$;

A gdy punkt O' nie znajduje się w początku współrzędnych O, to główny moment statyczny $M_g$ musi być prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez punkt i przez prostą działania siły S, a ponieważ siła S jest równoległą $W_g$, wobec tego otrzymujemy, że $M_g$ jest prostopadłe do $W_g$: $M_g \perp W_g$, /Rys.60/ .c b d o.




Rys.61.

Udowodnimy teraz w y s t a r c z a l n o ś ć w a r u n k ó w, zawartych w twierdzeniu.

Gdy $M_g = 0$, to siła S równa co do wartości liczebnej i kierunku, głównemu wektorowi $W_g$ i przyłożona w początku współrzędnych O, będzie właśnie siłą wypadkową danego układu sił.

Gdy zaś $M_g \perp W_g$ weźmiemy taką parę sił, odpowiadającą momentowi statycznemu $M_g$, żeby jej siły były, co do wartości liczebnej równe głównemu wektorowi sił $W_g$, wtedy ramię tej pary będzie równe ilorazowi $\frac{M_g}{W_g}$. Przesuniemy tę parę w przestrzeni tak, aby jedna z jej sił S' była skierowaną wzdłuż prostej działania głównego wektora $W_g$ /rys. 61/, lecz w przeciwnym kierunku, wtedy druga siła S, należąca do pary sił będzie działać wzdłuż prostej O' S, równoległej do prostej działania głównego wektora $W_g$. Główny wektor sił układu $W_g$ i siła S', działające na punkt O, wzajemnie się równoważą. Pozostaje więc jedna siła S równa co

do wartości liczebnej i kierunku głównemu wektorowi sił układu $W_g$. Ta siła S jest siłą wypadkową danego układu sił. C.b.d.o.

Wzkażemy teraz sposób w y z n a c z a n i a  p u n k t u  O  z a c z e p i e n i a  w y p a d k o w e j  s i ł y  u k ł a d u:

Przeprowadźmy przez początek współrzędnej O prostą OO', prostopadle do płaszczyzny, zawierającej główny moment statyczny $M_g$ i główny wektor $W_g$ sił danego układu, w tę stronę, aby patrzący, mając główny wektor $W_g$ przechodzącym od nóg ku głowie, i zwrócony twarzą ku głównemu momentowi statycznemu $M_g$, widział prostą OO' skierowaną od strony lewej ku prawej / patrz rys. 61 /.

Na tej prostej OO' odetniemy odcinek $W_g$ [$M_g$], otrzymany w ten sposób punkt będzie poszukiwanym punktem zaczepienia siły wypadkowej układu.

Wyprowadzimy wzór analityczny dla przypadku kiedy $M_g = 0$ albo $M_g \perp W_g$, zakładając że $W_g \neq 0$.

Z geometrii analitycznej mamy wzór :

$$M_g . W_g . \cos / M_g , W_g / = M_{gx} W_{gx} + M_{gy} W_{gy} + M_{gz} W_{gz} ,$$

ponieważ zakładamy, że $W_g$ nie jest równy zeru, to równość $M_g W_g . \cos / M_g W_g / = 0$ może zachodzić tylko w dwóch wypadkach: gdy $M_g = 0$ albo gdy $\cos / M_g , W_g / = 0$, czyli $M_g \perp W_g$.

Stad widzimy, że równość:

$$M_{gx} W_{gx} + M_{gy} W_{gy} + M_{gz} W_{gz} = 0,$$

jest poszukiwanym warunkiem.

Do wyznaczania rzutów siły wypadkowej na osie współrzędnych mamy wzory:

$$S , \cos / S , X / = W_{gx} ; S . \cos . / S , Y / = W_{gy} ; S . \cos / S , Z / = W_{gz} .$$

Wyznaczymy jeszcze współrzędne punktu $O' / x_o , y_o z_o /$, t.j. punktu zaczepienia wypadkowej; w tym celu następujący układ rów-

nań rązwiaz7jemy względem niewiadomych $x_o, y_o, z_o$:

$$W_{gz}y_o - W_{gy}z_o = M_{gx}\ ;\ W_{gx}z_o - W_{gz}x_o = M_{gy}\ ;\ W_{gy}x_o - W_{gx}y_o = M_{gz} \quad \text{i}$$

$$W_{gx}x_o + W_{gy}y_o + W_{gz}z_o = 0.$$

Pierwsze trzy z tych równań wyrażają, że momenty statyczne siły wypadkowej S, przyłożonej w punkcie O' / $x_o, y_o, z_o$ /, względem każdej z trzech osi współrzędnych równają się odpowiednio głównym momentom statycznym względem tych samych osi, czwarte równanie wyraża, że odcinek prostej $\overline{OO'}$ jest prostopadły do prostej działania głównego wektora sił $W_g$:

$$\overline{OO'}\, W_g \cos /\overline{OO'}, W_g/ = W_{gx}x_o + W_{gy}y_o + W_{gz}z_o = 0.$$

Aby rozwiązać powyższe cztery równania pomnożymy trzecie z tych równań przez $W_{gy}$, drugie przez $W_{gz}$, a następnie odejmiemy jednood drugiego wtedy:

$$/W_{gy}^2 + W_{gz}^2/x_o - W_{gx} \cdot z_o - W_{gx} \cdot W_{gy} \cdot y_o = M_{gz} \cdot W_{gy} - M_{gy} \cdot W_{gz},$$

dodając i odejmując od lewej części jednocześnie wyrażenie- $W_{gx}^2 x_o$, otrzymamy:

$$/W_{gx}^2 + W_{gy}^2 + W_{gz}^2/ \cdot x_o - W_{gx}/W_{gx}x_o + W_{gy}y_o + W_{gz}z_o/ = M_{gz} \cdot W_{gy} - M_{gy}W_{gz};$$

Na zasadzie równania czwartego znajdujemy ostatecznie:

$W_g^2 x_o = M_{gz} \cdot W_{gy} - M_{gy} \cdot W_{gz}$, skąd wynika poszukiwany wzór na

$$x_o = \frac{M_{gz}W_{gy} - M_{gy}W_{gz}}{W_g^2}$$

W analogiczny sposób otrzymamy następne dwa wzory:

$$y_o = \frac{M_{gx}W_{gz} - M_{gz}W_{gx}}{W_g^2} \quad \text{i} \quad z_o = \frac{M_{gy}W_{gx} - M_{gx}W_{gy}}{W_g^2} \quad \ldots\ldots /*/.$$

W szczególnym wypadku równoległych sił, mamy twierdzenie w takiej postaci:

Siły równoległe działające na bryłę materialną, sprowadzają się do jednej wypadkowej, jeżeli ich główny wektor nie jest równy zero $/\sum_{i=1}^{n} S_i \neq 0/$.

Obierzemy osie współrzędnych w ten sposób, aby jedna z nich np. oś OX, była równoległą do sił układu, tedy będziemy mieli:

$W_{gy}=0$, $W_{gz}=0$ i $M_{gx}=0$,

a więc warunek $M_{gx}\cdot W_{gx}+M_{gy}\cdot W_{gy}+M_{gz}\cdot W_{gz}=0$ będzie spełniony i siły układu sprowadzą się do jednej wypadkowej.

Wartość liczebna tej wypadkowej równa się sumie algebraicznej liczebnych danych sił wypadkowych : $\sum_{i=1}^{n} S_i$, prosta działania jej jest równoległą do danych sił, a kierunek zależy od znaku sumy algebraicznej $\sum_{i=1}^{n} S_i$.

Jeden z punktów zaczepienia wypadkowej sił równoległych, dowolnie rozmieszczonych w przestrzeni, posiada taką własność, iż położenie jego w przestrzeni nie zależy od kierunku prostych działania sił układu. Ten punkt szczególny nazywamy ś r o d k i e m S u k ł a d u s i ł r ó w n o l e g ł y c h .

Aby wykazać, że taki punkt rzeczywiście istnieje i żeby go wyznaczyć, złożymy kolejno po dwie siły z początku siły, skierowane w jedną i tę samą stronę, a następnie - siły, skierowane w przeciwną stronę przy tym wyznaczymy za każdym razem odpowiedni środek. Otrzymane w rezultacie tej operacji dwie siły, które są skierowane prze przeciwne strony dodamy i wyznaczymy ich środek, ten środek będzie właśnie poszukiwanym punktem t.j. środkiem S układu równoległych sił.

Srodek równoległych sił układu jest to ten punkt zaczepienia ich wypadkowej, dookoła którego będzie się poruszała ta wypadkowa, gdy będziemy obracać wszystkie siły układu dookoła ich punktów zaczepienia o jeden i ten sam kąt, nie naruszając ich równoległości.

Współrzędne $/x_s, y_s, z_s/$ środka S układu równoległych sił wyrażają się wzorami:

$$x_s=\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}\qquad y_s=\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}\qquad z_s=\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i},$$

przyczym $/x_i, y_i, z_i/$ są współrzędnymi punktu zaczepienia siły $S_i$ / i= 1,2,3,4,.....,n /.

W celu wyprowadzenia tych wzorów drogą analityczną, zaznaczymy, że moment statyczny siły wypadkowej $\sum_{i=1}^{n} S_i$, przyłożonej w środku S, równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych względem osi współrzędnych prostokątnych OX, OY i OZ /patrz §1.rozdz.V./.

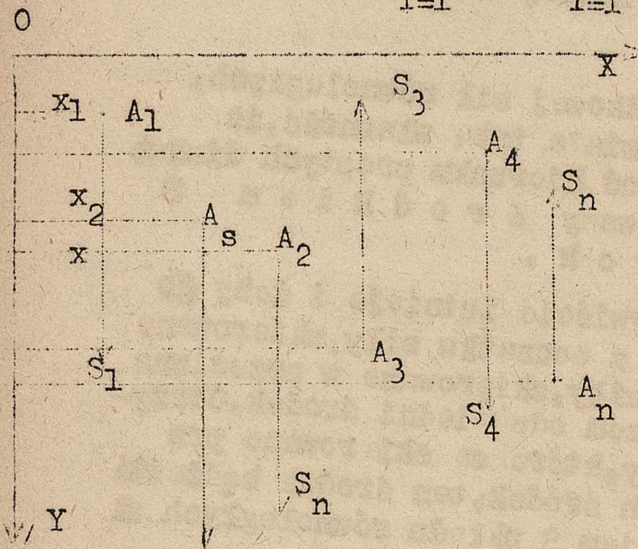
Korzystając z wyżej wspomnianej własności środka S układu równoległych sił w celu zestawienia momentów względem osi OZ, nada-

jemy siłom układu kierunek równoległy,np. do osi OY /Rys, 62./i napiszemy dla takiego ich położenia równanie momentów.

Na rys. 62 mamy płaszczyznę XOY,na którą zrzutowane są siły danego układu $S_1, S_2 \ldots\ldots S_n$; oś współrzędnych OZ wyobrażamy sobie idąca z punktu O prostopadle do rysunku wstronę patrzącego.

Równanie momentów będzie wtedy /patrz §1 rozdz VI. /:

$$x_s \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} S_i x_i ,$$



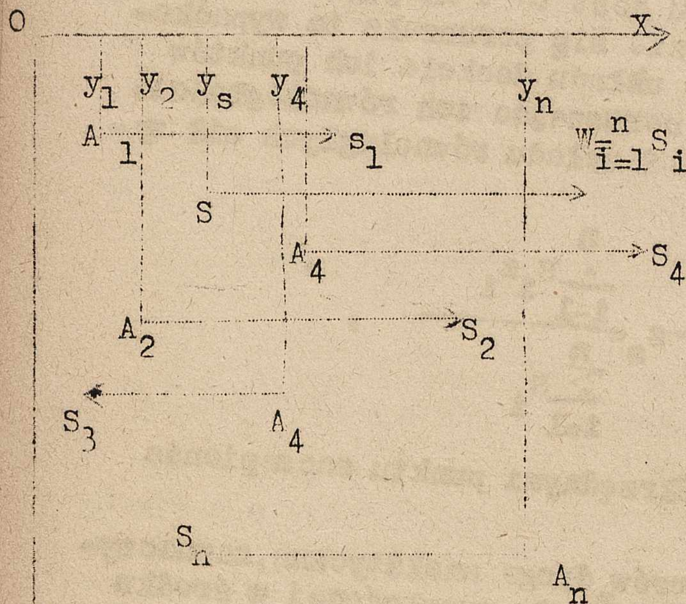

Rys.62.

ponieważ rzuty danych sił układu i ich wypadkowej na osi OX i OZ są równe zeru,a rzuty sił układu na oś OY są: $S_1, S_2 \ldots S_n$ i rzut wypadkowej:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i .$$

Skąd otrzymujemy wzór na współrzędną $x_s$=

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$




Rys.63.

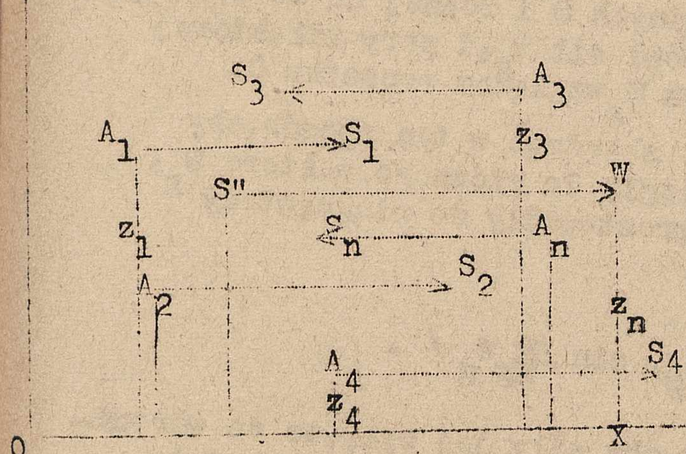
Obróćmy teraz /rys.63. / wszystkie siły naszego układu tak, by były równoległe do osi OX i zestawmy równanie momentów względem tychże osi OZ co i poprzednio ,tody otrzymamy:

$$-y_s \sum_{i=1}^{n} S_i = -\sum_{i=1}^{n} S_i y_i ,$$

Skąd mamy wzór na współrzędną:

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

Przypuśćmy wreszcie,iż siły układu są skierowane równolegle do osi OX,układając wtedy równanie momentów względem osi OY, będziemy mieli:



Rys.64.

$$z_s \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} S_i z_i ,$$

Skąd mamy trzecią współrzędną środka układu równoległych sił:

$$z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

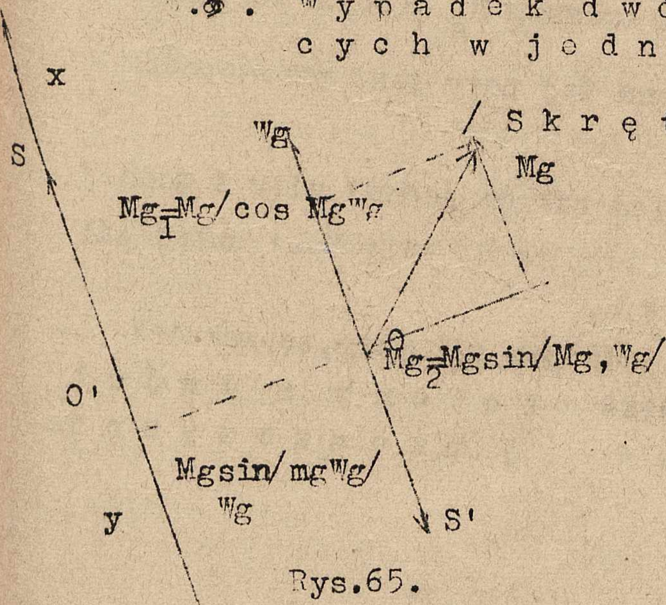
Płaszczyzna rys 63.jest płaszczyzną XOZ,na którą rzutowanę są siły naszego układu,przyczym punkt S" jest rzutem środka S ,a oś OY przechodzi przez punkt O prostopadle do rysunku w stronę patrzącego.-

Postępując w ten sposób dalej,moglibyśmy napisać wszystkiego sześć równań momentów,trzy niedopisane równania momentów byłyby powtórzeniem wyżej napisanych trzech ,ponieważ każdy układ równolgły sił posiada jeden i tylko jeden środek.Zauważymy,że dla sprowadzenia układu równoległych sił do jednej siły wypadkowej $W= \sum_{i=1}^{n} S_i$ nie ma potrzeby obliczyć współrzędnych / $x_o, y_o, z_o$, / punktu zaczepienia O',wyrażonych wzorami /✕/ tego §-fu,o wiele łatwiej wyznaczyć środek układu równoległych sił S / $x_s, y_s, z_s$ / ,wg tylko co wprowadzonych wzorów.

Gdy dany układ sił jest płaski,t.j.,gdy wszystkie siły układu leżą w jednej płaszczyźnie wtedy pierwsze dwa z tych wzorów wystarczą do wyznaszenia ich środka S / $y_s, x_s$ / .

## §.5. Wypadek dwóch sił nie leżących w jednej płaszczyźnie.

/ Skrętnik /.



Rys.65.

Twierdzenie. Gdy główny wektor sił układu nie jest równy zeru ,a główny moment statyczny też nie jest równy zeriu i nie jest prostopadły do głównego wektora ,to układ sprowadza się do jednej siły i jednej pary sił o płaszczyźnie

p r o s t o p a d ł e j   d o   k i e r u n k u   t e j   s i ł y .

Przypuśćmy, iż układ sił jest równoważny układowi złożonemu siły przyłożonej do początku współrzędnych O i równej co do wartości liczebnej i kierunku - głównemu wektorowi sił $W_g$, i pary sił, której moment jest głównym momentem statycznym $M_g$ względem początku O.

Parę tę rozłożymy na dwie pary składowe w ten sposób, aby moment statyczny jednej pary $M_{g1}$ był równoległy do głównego wektora $W_g$, a moment statyczny drugiej pary $M_{g2}$ - prostopadły do niego, wtedy będziemy mieli,

$$M_{g1} = M_g . \cos / M_g W_g / , \quad M_{g2} = M_g . \sin / M_g W_g / .$$

Drugą parę przekształcimy tak, aby siły jej były, co do wartości liczebnej, równe głównemu wektorowi sił $W_g$, wtedy ramię jej będzie:

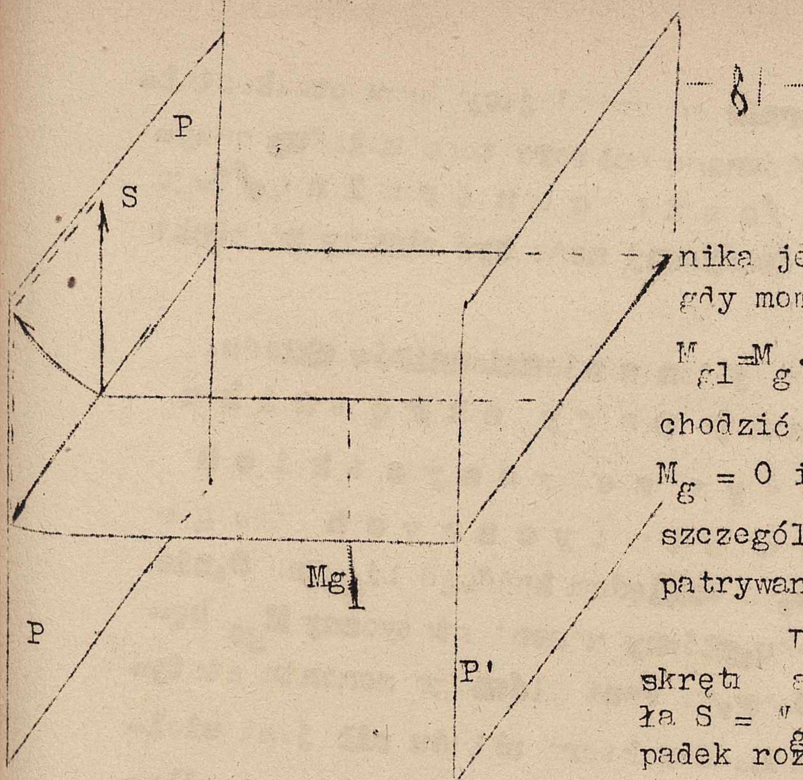
$$\frac{M_{g2} \sin / M_g W_g /}{W_g} .$$

Następnie umieścimy otrzymaną parę w ten sposób, aby jedna z jej sił S' była przyłożona w punkcie O i skierowaną wzdłuż prostej działania głównego wektora $W_g$ lecz w stronę przeciwną, wtedy druga siła będzie przyłożona w punkcie O', przyczem odcinek prostej $\overline{OO'} = \frac{M_g \sin / M_g W_g /}{W_g}$ jest ramieniem tej pary /Rys.65 /.

Ten odcinek $\overline{OO'}$, będąc prostopadłym jednocześnie do $\overline{OS'}$, i do $M_{g2}$, będzie prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez punkt O zawierającej główny wektor $W_g$ i główny moment statyczny $M_g$. Dwie siły $W_g$ i $S'$ wzajemnie się równoważą, pozostaje jedna siła S równa $W_g$ $/ = W_g /$ i jedna para sił o momencie statycznym $M_{g1}$, ponieważ moment $M_{g1}$ jest równoległy do S to płaszczyzna tej pary jest prostopadła do S siły S.

Sprowadziliśmy więc dany układ sił do jednej siły i jednej pary sił której płaszczyzna jest prostopadła do siły. Taki układ sił nazywamy s k r ę t n i k i e m. C.b.d.o.

Jeżeli dodamy siłę S tego układu do jednej z sił pary, to wskutek tego przekształćmy powyższy układ na układ z ł o ż o n y z d w ó c h s i ł n i e l e ż ą c y c h w j e d n e j p ł a s z c z y z n i e. / rys.66/.



Rys.66.

Szczególnym wypadkiem skrętnika jest jedna siła wypadkowa S, gdy moment statyczny $M_{gl}=M_g.\cos/M_g W_g/ = 0$ co może zachodzić w dwóch wypadkach 1/ gdy $M_g = 0$ i 2/ gdy $M_g \perp W_g$; ten więc szczególny wypadek był osobno rozpatrywany w poprzednim §4.

Drugim szczególnymwypadkiem skrętnika jest jedna para sił, gdy siła $S = W_g = 0$; i ten szczególny wypadek rozpatrywaliśmy już w §3.

Wreszcie trzecim szczególnym wypadkiem skrętnika jest równowaga sił układu co nastąpi, gdy jednocześnie zachodzą równości: $W_g = 0$ i $M_{gl} = 0$, mieliśmy ten wypadek w §2 tego twierdzenia:

Twierdzenie: k a ż d y u k ł a d s i ł m o ż e b y ć p r z e s z t a ł c o n y n a r ó w n o w a ż n y u k ł a d, z ł o ż o n y z j e d n e j s i ł y /m o g ą c e j = 0/ i z j e d n e j p a r y s i ł /m o m e n t k t ó r e j m o ż e = 0/ p ł a s z c z y z n a k t ó r e j j e s t p r o s t o p a d ł a d o p r o s t e j d z i a ł a n i a t e j s i ł y.

Główny wektor układu jest wartością stałą niezależną od obranego bieguna przekształcenia O'.

W § I tego rozdziału udowodniliśmy, iż rzut głównego momentu statycznego na prostą działania głównego wektora jest wielkością też stałą dla danego układu sił i nie zmienia się ze zmianą położenia bieguna O'.

Dlatego też wektory $S = W_g$ i $M_{gl} = M_g.\cos/M_g W_g/$, otrzymane jako rezultat przekształcenia danego układu sił na skrętnik nazywamy n i e z m i e n n i k a m i /i n w a r i a n t a m i/, tego układu sił.

Gdy układ sił jest przekształcony na skrętnik to prostą

xy na rys 65. przeprowadzona przez odpowiadający temu przekształceniu biegun O',równolegle do głównego wektora tego układu, nazywamy osią środkową /osią centralną/ tego układu sił. Każdy z punktów osi środkowej może być obrany za punkt zaczepienia siły S skrętnika.

Łatwo przekonamy się,że jeden z niezmienników układu, mianowicie moment statyczny pary skrętnika $M_l$ jest najmniejszym ze wszystkich głównych momentów statycznych tego układu. Dlatego udowodnimy,że względem każdego bieguna O,nie leżącego na osi środkowej układu,główny moment statyczny $M_{gc}$ będzie większy od momentu $M_{gl}$. Wiemy,że rzut głównego momentu statycznego na prostą działania głównego wektora układu sił jest wielkością stałą,nie zmieniającą się ze zmianą położenia bieguna,dlatego też rzuty głównych momentów $M_{gc}$ i $M_{gl}$ na kierunek głównego wektora $W_g$ są sobie równe,a więc mamy:

$$M_{gl} = M_{gc} \cdot \cos / M_{gc}, W_g /;$$

$$\text{ale } / \cos / M_{gc}, W_g / \leq 1, \text{ to } M_{gl} \leq M_{gc}.$$

Znak " = " odpowiada wypadkowi gdy $M_{gc} \parallel W_g$ ,więc wypadkowi skrętnika. C.b.d.o.

Z powyższych rozważań wynika następujacy sposób sprowadzenia danego układu sił do postaci skrętnika:

Wyznaczymy główny wektor $W_g$ i główny moment statyczny $M_g$ danych sił względem dowolnego bieguna O / zwykle początku współrzędnych /.

Następnie z punktu O wystawiamy prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej przez główny wektor $W_g$ i główny moment statyczny $M_g$ układu w tym kierunku,jak to zrobiliśmy w poprzednim §, mianowicie,aby patrzący mając główny wektor $W_g$ przechodzącym od nóg ku głowie,i będąc zwróconym twarzą ku głównemu momentowi statycznemu $M_g$,widział tę prostopadłą / OO' ze rys.64 / skierowaną od strony lewej ku prawej.

Na przeprowadzonej w ten sposób prostopadłej /OO' /

odcinamy długość 00' $= \frac{M_g \sin / M_g W_g /}{W_g}$

Wtedy siła S równa się co do wartości liczebnej i kierunku głównemu wektorowi sił $W_g$ i para sił, której płaszczyzna jest prostopadłą do prostej działania siły S, o momencie statycznym $M_{gl} = M_g \cos / M_g, W_g /$, będą tworzyły układ równoważny sił czyli skrętnik / rys.65./

## VII. Środek ciężkości brył, powierzchni i linii materialnych.

Wszystkie ciała na powierzchni kuli ziemskiej lub też w pobliżu jej, znajdują się pod działaniem siły ciężkości, przyczem z powodu nieznacznych wymiarów rozpatrywanych ciał w porównaniu do wymiarów kuli ziemskiej możemy przyjąć, iż przyłożone do poszczególnych części ciała siły ciężkości są wzajemnie równoległe. Dlatego też wypadkowa sił ciężkości przyłożonych do poszczególnych części bryły jest równą sumie tych sił, a punkrem jej zaczepienia na bryle jest środek równoległych sił ciężkości; ten punkt nazywamy w skróceniu **środkiem ciężkości.**

Dla wyznaczenia jego współrzędnych możemy więc zastosować wzory, otrzymane w §4 poprzedniego rozdziału VI / wypadek równoległych sił/.

Przypominając sobie własność środka równoległych sił, że jego położenie w bryle pozostaje niezmienne podczas obrotu wszystkich sił o jeden i ten sam kąt, jeżeli tylko przy tym nie zmieniają się same siły i punkty ich zaczepienia i zaznaczając, że obrót sił możemy zastąpić przez zmianę położenia samej siły dojdziemy do wniosku, że **środek ciężkości bryły jest to ten punkt zaczepienia siły jej ciężkości, który pozostaje stałym gdy bryła zmienia swe położenie w przestrzeni.**

Dla określenia położenia środka ciężkości bryły możemy użyć wspomniane wyżej wzory, rozciągając sumowanie na wszystkie części bryły.

Siły $S_1, S_2, \ldots S_n$ są w tym wypadku $m_1 g, m_2 g \ldots m_n g$, przyczym $m_1, m_2, \ldots m_n$, są to masy części bryły, a g przyspieszenie ziemskie.

Wtedy

Wtedy $\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g = g\sum_{i=1}^{n} m_i = gM,$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i g = g\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i S_i = g\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i S_i = g\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Gdzie M jest masa bryły. Wzory na współrzędne środka S będą-

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

Zwykle, a nawet prawie zawsze mamy do czynienia z bryłami jednorodnymi.

Bryłę nazywamy jednorodna gdy stosunek masy dowolnej jej części do objetości tejże części jest wiwlkościa stała.

Stosunek ten nazywamy gęstościa bryły.

Oznaczajac gęstość jednorodnej bryły przez $\delta$, będziemy wg definicji mieć

$$m_i = \delta \cdot v_i,$$

przyczym $v_i$ jest objętość zajęta przez masę $m_i$.

Wtedy wzory poprzednie piszemy tak:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$$

Często rozpatrujemy takie bryły, że zgodnie z warunkami zagadnienia, możemy zaniechać jeden, lub nawet dwa wymiary tej bryły, -np. rozpatrujac cienka niezmienna płytę, możemy nie brać pod uwagę jej grubości, albo rozpatrujac cienki niezmienny pręt możemy nie brać pod uwagę, jak jego grubości tak i szerokości. W podobnych wypadkach będziemy mówili o materialnej powierzchni lub o materialnej linii i mówiąc "powierzchniowa gęstość" lub "liniowa gęstość" będziemy rozumieć stosunek masy dowolnej części powierzchni lub linii do wielkości tej części.

Oznaczajac przez $S_i$ i $l_i$ wielkości pola i długości powierzchni i linii, będziemy mieć odpowiednio: $m_i = \delta S_i$ i $m_i = \delta l_i$.

W wzorach dla $x_s, y_s$ i odpowiednio zmieni się $v_i$ na $S_i$ lub $l_i$

Dla wyznaczenia środka ciężkości bryły,powierzchni lub linii niezbędnym jest dzielić je na części.To dzielanie możemy wykonać dwoma sposobami.

albo brać części skończone ale takie,że dla każdej z nich położenie środka ciężkości jest nam znane.

Albo brać nieskończenie małe części,dla których środek ciężkości możemy uważać znajdującym się w dowolnym punkcie.

W tym drugim wypadku,sumy wchodzące do wyrażenia $x_s$, $y_s$ i $z_s$ będą oczywiście całkami określonymi,rozciągniętymi na całą bryłę,powierzchnię lub linię.

Istnieje jeszcze jeden sposób,bardzo dogodny w praktyce,mianowicie często możemy rozpatrywać daną bryłę,powierzchnię,lub linię,jako granicę pewnych zmiennych brył,powierzchni lub linii.Oczywiście, że w takich wypadkach położenie środka ciężkości będzie granicznym dla położenia środka ciężkości wprowadzonej wielkości zmiennej.Współrzędne środka danej bryły będą zatym granicami współrzędnych środka tej zmiennej wielkości.W przytoczonych wyżej wzorach trzeba brać, stosując ten sposób,granicę tych sum,które w nie wchodzą,a same sumy trzeba układać nie dla danej bryły,powierzchni lub linii, lecz dla wprowadzonej zmiennej wielkości.

Wskażemy teraz kilka wniosków wypływających ze wzorów na $x_s$, $y_s$ i $z_s$,które znacznie ułatwiają nam wyznaczenie środka ciężkości w wielu wypadkach.

I. Jeżeli jednorodna bryła /pow.lub linia/ posiada płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości jej znaduje się na tej płaszczyźnie.

Rzeczywiście,dzieląc bryłę na nieskończenie małe elementy i biorąc osie OXYZ w ten sposób,aby płaszczyzna symetrii bryły płaszczyzną XOY,otrzymamy,że w sumie $\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$ każdej składowej $+m_i z_i$ odpowiada składowa $-m_i z_i$,i dlatego suma będzie równa zeru.-

Ale wtedy będziemy mieli: $Z_s=0$ , t.j. środek ciężkości będzie znajdował się na płaszczyźnie XOY, czyli innymi słowy na płaszczyźnie symetrii.

II. Jeżeli jednorodna bryła /pow.lub linia/ posiada oś symetrii , to środek ciężkości jej znajduje się na jej osi.

Przyjmując oś symetrii za oś współrzędnych OZ,będziemy mieć jak poprzednio,że $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0$, a dlatego też $x_s = y_s = 0$, co wskazuje,że środek ciężkości leży właśnie na osi OZ t.j. na osi symetrii.

III. Jeżeli jednorodna bryła /pow.lub linia/ posiada środek symetrii to środek ciężkości jej znajduje się w środ-

III. Jeżeli jednorodna bryła pow. lub linia / posiada środek symetrii, to środek ciężkości jej znajduje się w środku symetrii.

Przyjmując jak poprzednio środek symetrii za początek układu współrzędnych O, będziemy mieć

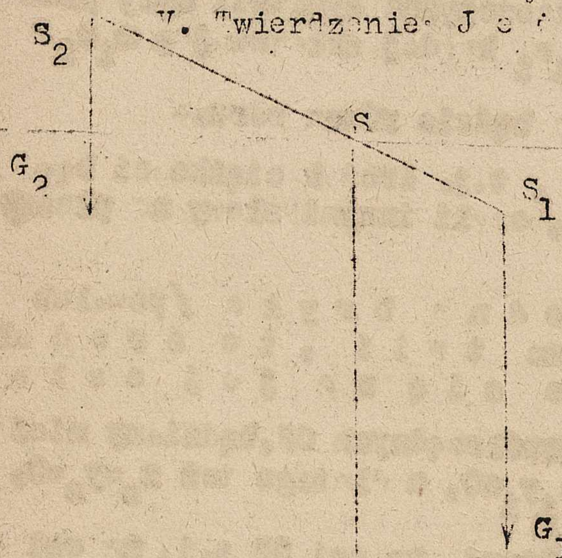
$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0, \text{więc } x_s = y_s = z_s = 0 \quad \text{c.b.d.o.}$$

IV. Jeżeli środki ciężkości poszczególnych części jednorodnej bryły /pow. lub linii / znajdują się na jednej płaszczyźnie lub na jednej prostej, lub nareszcie w jednym punkcie to na tejże płaszczyźnie, prostej lub w tymże punkcie i środek ciężkości całej bryły, /pow. lub linii /.

Dowód jest analogiczny do poprzedniego, jedyną różnicą jest to, że części na które dzielimy bryłę, są teraz nie nieskończenie małe lecz skończone. Sposób dowodu jest oczywisty.

Jeżeli do układu kilku brył dołączymy jakąś bryłę, lub z tego układu wyłączymy jedną z brył tworzących ten układ, to położenie środka ciężkości całego układu zmieni się, tak samo położenie środka ciężkości ulegnie zmianie, gdy, niezmieniając składowych części układu, przesuniemy jedną z brył tego układu względem innych brył.

Następujące twierdzenie wskazuje jak się zmieni w tych wypadkach położenie środka ciężkości.



Rys. 67.

V. Twierdzenie: Jeżeli do układu brył, ciężar, którego jest $G_1$ i środek znajduje się w punkcie $S_1$ /rys.67/. dołączymy bryłę o ciężarze $G_2$ ze środkiem w punkcie $S_2$, to położenie środka ciężkości S powstałego układu brył wyznaczy się na prostej $S_1, S_2$, w odległości od środka $S_1$ początkowego układu, równej odcinkowi $S_1 S_2$, pomnożonemu

przez stosunek ciężaru dołączonej bryły do ciężaru powstałego nowego układu brył.

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia o składaniu sił równoległych, skierowanych w jedną i tą samą stronę, mianowicie sił $G_1$ i $G_2$.

Rzeczywiście mamy, że $S_1S : S_2S = G_2 : G_1$ skąd układając proporcję przechodnią otrzymamy:

$$S_1S : / S_1S + S_2S / = G_2 : / G_2 + G_1 /$$

albo tak $S_1S : S_1S_2 = G_2 : G$,

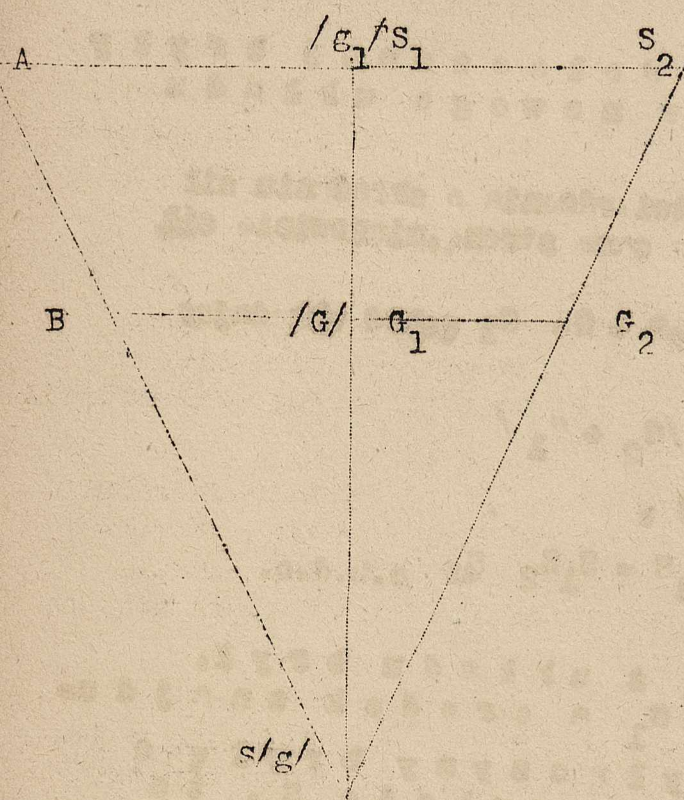
ta ostatnia proporcja daje $S_1S = S_1S_2 \frac{G_2}{G}$ c.b.d.o.

VI. Twierdzenie. Jeżeli z układu brył, którego ciężar jest $G_1$ a środek znajduje się w punkcie $S_1$, wyłączymy bryłę o ciężarze $G_2$ i środku w punkcie $S_2$, to położenie środka S pozostałego układu brył wyznaczy się na przedłużeniu prostej $S_1S_2$ w stronę środka $S_1$ początkowego układu brył w odległości od tego środka, równej odcinkowi $S_1S_2$ pomnożonemu przez stosunek ciężaru wyłączonej bryły do ciężaru nowo powstałego układu.

Rzeczywiście, jeżeli na rysunku 67 przestawimy $S_1$ i S, a także $G_1$ i G /przytem oczywiście G będzie równało się $G_1 - G_2$, a nie $G_1 + G_2$ jak wyżej /, to powyższą proporcję można przepisać w ten sposób:

$$S_1S : S_1S_2 = G_2 : G, \text{ skąd } S_1S = S_1S_2 \frac{G_2}{G} \text{ c.b.d.o.}$$

VII. Twierdzenie: Jeżeli w układzie brył którego ciężar jest G, a środek znajduje się w punkcie $S_1$ przesuniemy jedną z brył o ciężarze g, tak aby jej środek ciężkości przesunął się przy tem z punktu $S_1$ do punktu $S_2$, to środek ciężkości całego układu przesunie się do punktu $C_2$ w kierunku równoległym do przesunięcia $S_1S_2$ danej bryły układu, przy tem przesunięcie środka całego układu jest




Rys. 68.

tyle razy mniejsze od danego przesunięcia bryły, ile ciężar tej ostatniej jest mniejszy od ciężaru całego układu /rys.68./.

Niech $C_1$ będzie środkiem całego układu, $S_1$-odpowiedniem położeniem środka przesuwanej bryły, S-położeniem środka pozostałych brył danego układu,

niech następnie $S_2$ oznacza położenie środka przesuwanej bryły po wykonaniu przesunięcia, a $C_2$-odpowiednie położenie środka całego układu,

niech wreszcie $g_1$, g i G oznaczają odpowiednio ciężary przesuwanej bryły, pozostałych brył i całego układu, wtedy $G=g+g_1$.

Będziemy mieli: $SC_1 : C_1S_1 = g_1 : g$ i $SC_2 : C_2S_2 = g_1 : g$

układając pochodne proporcje, otrzymamy:
$/SC_1 + C_1S_1/ : SC_1 = /g_1+g/ : g_1$ i $/SC_2 + C_2S_2/ : SC_2 = /g_1+g/ : g_1$

Możemy je przepisać w ten sposób: $SS_1 : SC_1 = SS_2 : SC_2 = G : g_1$

Pierwsza proporcja wskazuje, że △ $SS_1S_2$ jest podobny do △ $SC_1C_2$ i że $C_1C_2 // S_1S_2$,

druga zaś pozwala napisać $C_1C_2 : S_1S_2 = g_1 : G$.

Zestawiając ostatnią proporcję i równoległość $C_1C_2$ i $S_1S_2$ otrzymamy nasze twierdzenie.

Gdy zaś są nam znane wiadome punkty $C_1$, $S_1$, $S_2$ i S, to z łatwością znajdziemy geometrycznie punkt $C_2$ /rys.68/.

Często jednak położenie punkty S bywa niewiadome, a w zamian tego znamy ciężary $g_1$ i G, wtedy, aby wyznaczyć geometrycznie punkt $C_2$ koniecznie musimy z początku wyznaczyć punkt S.

W tym celu napiszemy proporcję $SC_1 : SS_1 = /G-g/ : G = g_1 : G$,

Jeżeli teraz na dowolnej prostej, przechodzącej przez punkt $S_1$, np. na $S_1S_2$ odetniemy od $S_1$ odcinek $S_1A$ równy G, a na prostej równoległej do poprzedniej, i przechodzącej przez punkt $C_1$, -odcinek $C_1B$ równy G-g, to łącząc punkty A i B i przedłużając prostą A B do przecięcia się z prostą $S_1C_1$, otrzymamy punkt poszukiwany S.

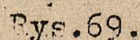
Powyższe twierdzenia mogą być ze skutkiem zastosowane do wyznaczenia środka ciężkości, gdy dana bryła /powierzchnia lub linia/ może być otrzymana z kilku brył, środki ciężkości których są nam znane, albo za pomocą dołączenia bryły z wiadomym środkiem albo za pomocą wyłączenia podobnej bryły, albo wreszcie za pomocą przesunięcia jednej z brył układu względem pozostałych.

Gdy przytem bryła / powierzchnia lub linia / jest jednorodna to zamiast stosunków ciężarów albo, co na to samo wychodzi stosunków mas rozpatrywać stosunki objętości, pól, lub długości linii. Rozpatrzymy teraz kilka przykładów odnajdywania środka ciężkości linii, powierzchni i bryły.

I. Przykład. środek ciężkości odcinka jednorodnej linii prostej znajduje się w jego geometrycznym środku, ponieważ ten środek jest środkiem symetrii tego odcinka /patrz III/.

II. Przykład. środek ciężkości jednorodnej foremnej linii łamanej. /rys.69/.

Ten środek musi znajdować się na prostej przechodzącej przez środek, wpisanego w łamaną linię, koła i dzielącej nawpół łamaną linię, przytym odległość środka ciężkości od środka wpisanego koła jest równa promieniowi tego koła, pomnożonemu przez stosunek zamykającej daną łamanej linii, do długości samej łamanej.


Rys.69.

Pierwsza część, wypowiedzianego tylko co zdania, wynika z tego, że prosta /rys.69/ .OY, przechodząca przez środek O i dzielącą łamaną ABCDEF na wpół, jest osią symetrii dla łamanej /patrz II/.

A by udowodnić część drugą tego zdania, weźmiemy osie współrzędnych tak, jak to jest wskazane na rys. i będziemy szukać współrzędnej $y_s$, ponieważ $x_s = 0$. Jako części, na które dzielimy łamaną, przyjmiemy jej boki, środki ich

ciężkości znajdują się w punktach K,N,M,P i Q. Oznaczając przez l-długość boków łamanej, a przez L-długość całej łamanej, będziemy mieli:

$$y_s = \frac{l.Kk+l.Nn+l.Mm+......}{L}$$

Przeprowadzimy $BB_1$ prostopadle do OY i rzutujemy bok BC za pomocą prostych Bb i Cc na zamykającą linii łamanej AF, wtedy z podobieństwa trójkątów $BCB_1$ i NOn, mamy proporcję:

$Nn:BB_1=ON:BC$, albo taką:

$Nn:bc=ON:l$

skąd $l.Nn=ON.bc$. Postępując podobnie z innymi bokami, otrzymamy, że

$$y_s = \frac{ON\,/Ab+bc+cd+.../}{L} = ON\frac{AF}{L} \text{ c.b.d.o.}$$

Rys.70.

III. Przykład. Środek ciężkości obwodu jednorodnego foremnego wieloboku znajduje się w środku tego wieloboku, co wynika jako wniosek z II przykładu.

IV. Przykład. Środek ciężkości jednorodnego łuku koła /rys.70./ znajduje się na promieniu koła, przechodzącym przez środek łuku, w odległości od środka koła równej promieniowi, pomnożonemu przez stosunek cięciwy tego łuku do długości samego łuku.

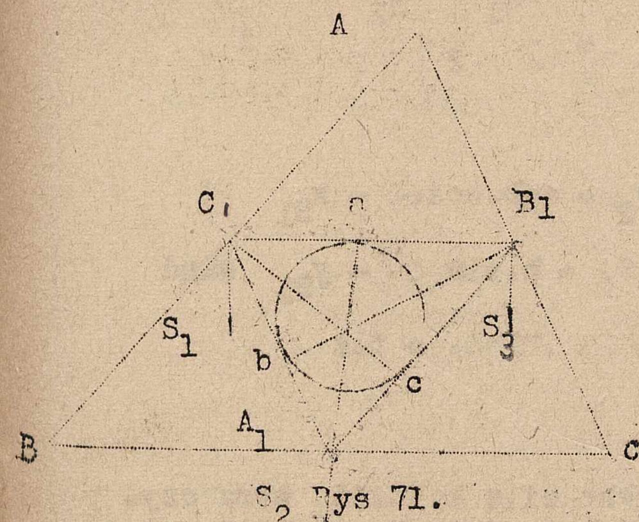
Długość łuku koła możemy rozpatrywać jako granicę wpisanych i opisanych dookoła niego foremnych linii łamanych, dlatego też, oznaczając przez $y'_s$ współrzędną środka ciężkości foremnej wpisanej linii łamanej, będziemy, dla współrzędnej $y_s$ środka łuku koła, mieli: $y_s=\lim/y'_s/$.

Ale mieliśmy, że $y'_s=ON\frac{AF}{L}$ więc $y_s=\lim/ON\frac{AF}{L}/ = \lim/ON/.\frac{AF}{\lim/L/}$, czyli ostatecznie $y_s = OC\frac{AF}{ACF}$. c.b.d.o.-

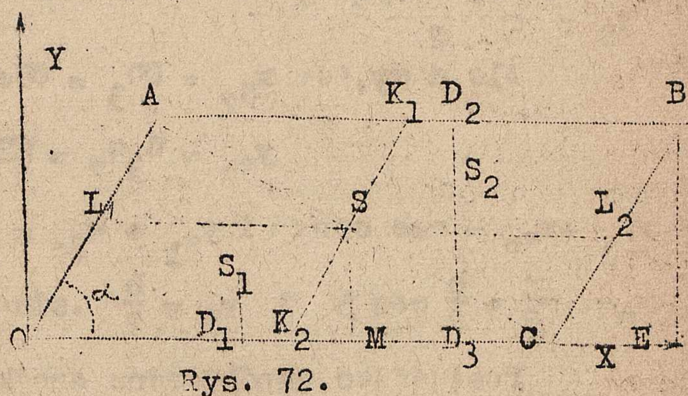
V przykład. Środek ciężkości jednorodnego obwodu trójkąta znajduje się w środku koła, wpisanego w ten trójkąt który otrzymujemy po połączeniu prostymi środków boków danego trójkąta /rys.71/.

Środek ciężkości każdego boku /strony/ trójkąta znajduje się w jego środku $A_1$, $B_1$ i $C_1$. Oznaczając przez $\delta$ gęstość liniową boków t-ta ABC, będziemy mieli: waga boku AB $=S_1=AB.\delta.g$, waga boku BC $=S_2=BC.\delta.g$ i waga boku CA$=S_3=CA.\delta.g$. Poszukiwany środek ciężkości jest środkiem trzech równoległych sił $S_1$, $S_2$ i $S_3$.

Składając wagi $S_3$ i $S_2$, otrzymamy wagę $S_3+S_2$, przełożoną w ta-



Rys 71.



Rys. 72.

kim punkcie $C$, że $cB_1 : cA_1 = S_2 : S_3$, ale mamy, że $S_2 : S_3 = BC : CA$ z geometrii zaś wiemy, że boki $A_1, B_1, C_1$ są dwa razy mniejsze od odpowiednich boków $\triangle$ ABC, a więc $BC : CA = B_1C_1 : C_1A_1$. Dlatego też otrzymujemy, że $cB_1 : cA_1 = B_1C_1 : C_1A_1$. Widzimy więc, że prosta $C_1c$ jest dwusieczną kąta $C_1$ w $\triangle$ $A_1B_1C_1$. Do punktu $C_1$ jest przyłożona siła ciężkości $S_1$, a do punktu $c$ siła ciężkości $S_2 + S_3$ więc punkt zaczepienia wypadkowej sił $S_1, S_2$ i $S_3$ znajduje się gdzieś na prostej $C_1c$, i środek ciężkości obwodu $\triangle$ ABC leży na dwusiecznej kąta $C_1$, $\angle$ $A_1B_1C_1$.

Zmieniając porządek składania sił $S_1, S_2$ i $S_3$ analogicznie przyjdziemy do wniosku, że poszukiwany środek ciężkości leży na dwusiecznych kątów $B_1A_1$ trójkąta $A_1B_1C_1$. Stąd wynika, że ten środek znajduje się w punkcie przecięcia się wzajemnego trzech dwusiecznych, t.j. w środku koła wpisanego w $\triangle$ $A_1B_1C_1$ c.b.d.o.

VI. Przykład. Ś r o d e k c i ę ż k o ś c i p o l a j e d n o r o d n e g o r ó w n o l e g ł o b o k u, znajduje się w punkcie przecięcia się prostych, łączących środki przeciwległych stron jego albo innymi słowy w punkcie przecięcia się przekątnych równoległoboku /rys. 72 /.

Niech $OC = AB = a$ i $OA = BC = b$ przyczym $\angle AOC = \alpha$. Podzielimy dany równoległobok OABC za pomocą przekątni AC na dwa trójkąty, i niech środki ciężkości tych trójkątów znajdują się w punktach $S_1, S_2$.

Ponieważ $\triangle$ OAC i ABC są sobie równe, to $OD_1 = BD_2$ i $S_1D_1 = S_2D_2$.

Biorąc osie współrzędnych w sposób wskazany na rys 72 / oznaczymy przez $x_{S_1}, y_{S_1}$ współrzędne punktu $S_1$ przez $x_{S_2}, y_{S_2}$ punktu $S_2$. Wtedy:

$$x_S = \frac{x_{S_1} \text{ /pole OAC/ } + x_{S_2} \text{ /pole ABC/}}{\text{pole OAC} + \text{pole ABC}} = \frac{x_{S1} + x_{S2}}{2} \quad \text{i}$$

$$y_S = \frac{y_{S1} + y_{S2}}{2}$$

Ale mamy, że: $x_{S_2} = OD_3 = OC + CE - BD_2 = a + b.\cos\alpha - x_{S1}$ i

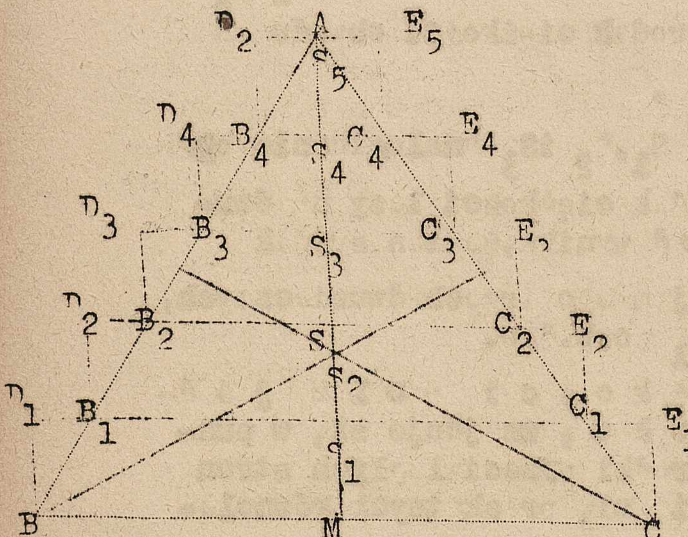
$y_{S_2} = D_3S_2 = BE - D_2S_2 = b.\sin\alpha - y_{S1}$ skąd

$x_{S_1} + x_{S_2} = a + b\cos\alpha$ i $y_{S_1} + y_{S_2} = b.\sin\alpha$. Dlatego też

$x_S = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\cos\alpha$ i $y_S = \frac{b}{2}.\sin\alpha$.

Posiadając współrzędne środka ciężkości, z łatością wyznaczymy go geometrycznie. Mianowicie połączymy prostymi $K_1, K_2$ i $L_1, L_2$ środki boków danego równoległoboku, otrzymany punkt przecięcia się będzie poszukiwanym środkiem ciężkości pola jednorodnegb równoległoboku, ponieważ $OM = OK_2 + K_2M = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\cos\alpha$, a $MS = \frac{b}{2}\sin\alpha = y_s$ c.b.d.o.

VII. Przykład. Ś r o d e k c i ę ż k o ś c i p o l a j e d n o r o d n e g o t r ó j k ą t a znajduje się w punkcie przecięcia się jego linii środkowych.



Rys. 73.

Przeprowadziliśmy w danym $\Delta$ ABC /rys. 73./ środkową AM i podzielimy ją na dowolną liczbę n części sobie równych, przez otrzymane punkty przeprowadzimy proste równoległe do podstawy BC i na nich wykreślimy równoległoboki, o bokach równoległych do linii środkowej AM naszego $\Delta$ ABC. Wtedy pole $\Delta$ ABC jest granicą sumy pól równoległoboków $BD_1E_1C$, $B_1D_2E_2C_1$... ...$B_4D_5E_5C_4$.

Rzeczywiście, podstawy tych równoległoboków są odpowiednio $BC\frac{n-1}{n}$, $BC\frac{n-2}{n}$ ......$BC\frac{1}{n}$, a wysokości równe $\frac{H}{n}$, przyczym H jest wysokość $\Delta$ ABC, biorąc za podstawę bok BC. Wtedy sumy pól tych równoległoboków:

$$S_n = BC\frac{H}{n} + BC\frac{n-1}{n}.\frac{H}{n} + BC\frac{n-2}{n}.\frac{H}{n} + \ldots + BC\frac{1}{n}.\frac{H}{n} =$$

$$= BC\cdot\frac{H}{n^2}\left[n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1\right] = BC\,\frac{H}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} =$$

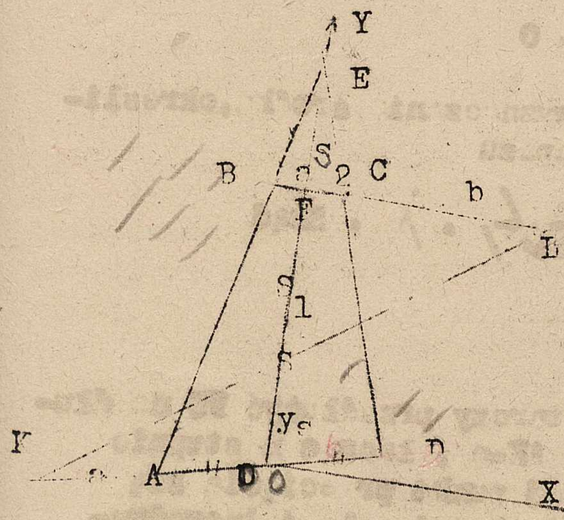
$$= \frac{BC.H}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \text{ skąd } \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{BC.H}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{BC.H}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{BC.H}{2} = \text{pole } \triangle ABC.$$

Stąd wnioskujemy, że środek ciężkości pola $\triangle$ ABC jest granicą środka ciężkości sumy $S_n$ pól równoległoboków. Ale środki siężkosci tych równoległoboków znajdują się na linii środkowej AM / punkty $S_1, S_2, \ldots, S_n$ na rys. 73. /; dlatego też /patrz IV / środek sumy ich pól też będzie się znajdował na tej linii środkowej niezależnie od linii n, więc środek $\triangle$ ABC leży na linii środkoewj AM. Przyjmujemy teraz za podstawę $\triangle$ ABC bok AC, wtedy analogicznie udowodnimy, że jego środek leży na linii środkowej BM'.

Zestawiając te wyniki, otrzymamy, że środek ciężkości S pola jednorodnego trójkata znajduje się w punkcie przecięcia się jego linii środkowych. Innymi słowy środek ten leży na linii środkowej w odległosci równej 1/3 tej linii środkowej od punktu przecięcia się jej z bokiem trójkata, do którego ona jest przeprowadzona /SM= 1/3 Am, SM' =1/3 BM' i SM"=1/3 CM" /.

VIII: Przykład. Środek ciężkości pola jednorodnego trapezu. /rys. 74 /.




Rys.74.

Oznaczymy jego podstawy przez BC=a, AD=b, a pole przez S. Przedłużając boki trapezu do wzajemnego przecięcia się, otrzymamy dwa $\triangle\triangle$ AED i BEC. Jeżeli O jest środkiem boku AD, to EO jest linia środkowa $\triangle$ AED, a EF linia środkowa $\triangle$ BEC. Z ich podobieństwa mamy:

EO: EF=b: a, pole $\triangle$ AED: pole $\triangle$ BEC= $= b^2 : a^2$, skąd otrzymujemy pochodne proporcje:

$(EO-EF) : EF = (b-a) : a$ i

$(\text{pole AED}-\text{pole BEC}) : \text{pole BEC} = (b^2-a^2) : a^2$.

Oznaczając EO przez $\lambda$ i zauważając, iż EO-EF= $\lambda$ i pole $\triangle$ AED-pole BEC= S, otrzymamy poprzednie proporcje w postaci :

$\lambda : EF = (b-a) : a$ i $S : \text{pole } \triangle BEC = (b^2-a^2) : a^2$, skąd

$$EF = \frac{a.\lambda}{b-a},\quad \text{pole } \triangle\, Bec = \frac{a^2 S}{b^2-a^2}.$$

Biorac osie współrzędnych, jak to jest wskazane na rys 74, t.j.

oś OY za prostą OE, a początek współrzędnych w punkcie O, i oznaczając odpowiednio przez $/x_{s2}, y_{s2}/$, $/x_{s1}, y_{s1}/$ i $/x_s, y_s/$ współrzędne środków $S_2, S_1$ i S trójkątów BEC, AED i trapezu ABCD będziemy mieć:

$$x_{s_1} = \frac{x_{s2} \cdot \text{pole} \triangle BEC + x_s S}{\text{pole} \triangle Bec + S} \quad i \quad y_{s_1} = \frac{y_{s2} \cdot \text{pole} \triangle BEC + y_s S}{\text{pole} \triangle Bec + S}$$

Ale z poprzedniego przykładu wiemy, że

$$y_{s_1} = \frac{1}{3} /\lambda + EF/, \; x_{s_1} = 0, \; y_{s_2} = \lambda + \frac{1}{3} EF, \; x_{s_2} = 0, \quad \text{to}$$

$$\frac{1}{3}/\lambda + EF/ = \frac{/\lambda + \frac{1}{3} EF/ \cdot \text{pole} \triangle BEC + y_s S}{\text{pole} \triangle Bec + S} \quad i$$

$$\frac{x_s S}{\text{pole} \triangle Bec + S} = 0 .$$

Wstawiając wartość na EF i pole BEC, otrzymamy, że

$$\frac{1}{3}/\lambda + \frac{a.\lambda}{b-a}/ \cdot / \frac{a^2 . S}{b^2 - a^2} + S / = /\lambda + \frac{a.\lambda}{3/b-a/}/ \cdot \frac{a^2 S}{b^2 - a^2} + y_s S \quad i$$

$x_s S = 0$. Skąd $y_s = \frac{/b+2a/ . \lambda}{3/a+b/}$ i $x_s = 0$

Aby wskazać sposób geometrycznego wyznaczania środka, określimy jego odległość od mniejszej podstawy trapezu.

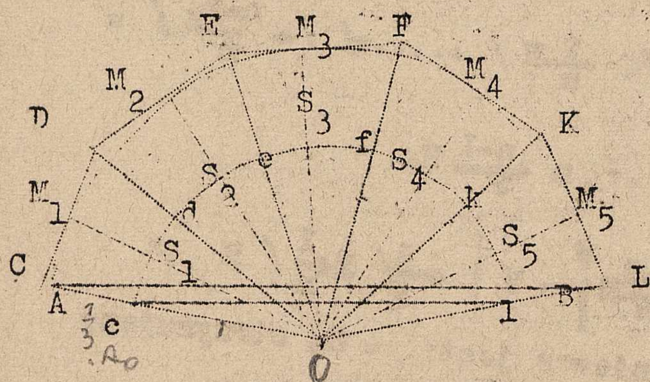
$$\lambda - y_s = \lambda - \frac{/b+2a/.}{3/b+a/} = \frac{/2b+a/}{3/b+a/} \cdot \lambda \text{ . Skąd}$$

$$\frac{\lambda - y}{y_s} = \frac{2b+a}{b+2a} = \frac{b + \frac{a}{2}}{a + \frac{b}{2}}$$

Widzimy więc, że aby otrzymać S, wystarczy przedłużyć FC na długości CL=b, a ... oA przedłużyć na długość AK=a, łącząc następnie otrzymane punkty L i K prostą, otrzymamy jej punkt przecięcia się $S_2$ z FC. Ten punkt jest właśnie środkiem ciężkości pola jednorodnego trapezu.

IX. Przykład. Środek ciężkości pola jednorodnego wycinka /sektora/ kołowego rys. 75.

Opiszemy dookoła łuku danego wycinka OAB foremną łamaną linie CDEFKL i połączymy środek łuku O z punktami C, D, F, K, L, położenie środka ciężkości wycinka OAB określimy jako graniczne położenie środka



Rys.75.

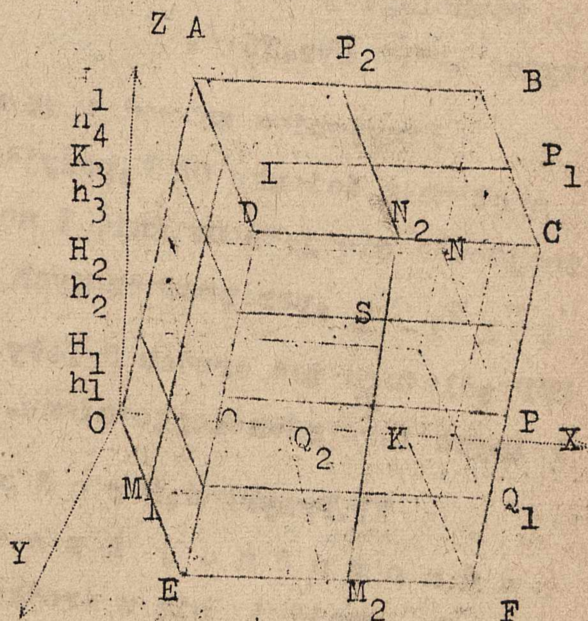
ciężkości sumy trójkątów COD, DOE,....KOL. Ale położenie środków tych trójkątów jest nam znane, leżą one w punktach $S_1$, $S_2$.....$S_3$, znajdujących się na łuku koła, opisanego ze środka o promieniu równym 2/3 promienia danego wycinka.

Wyznaczenie środka pola wycinka OAB sprowadziło się do wyznaczenia środka ciężkości łuku koła cdefkl, przyczym ten łuk uważamy za jednorodny, ponieważ pola △ △ COD, DOE,..... ...OKI, są sobie równe, jak i łuki od, de, ef, kl, w środkach których znajdują się punkty $S_1$, $S_2$,... .....$S_5$.

Posługują c się wynikiem IV-go przykładu otrzymamy, że odległość środka ciężkości łuku cl od jego środka O wzięta na promieniu środkowym $OS_3$ jest $OS_3 \cdot \frac{cl}{\frown cl}$; ale $OS_3 = 2/3\ R$ przyczym R jest promieniem wycinka i $\frac{cl}{\frown cl} = \frac{AB}{\frown AB}$ to ostatecznie $OS = 2/3\ R \cdot \frac{AB}{\frown AB}$

X. Przykład. Środek ciężkości bryły jednorodnej kształtu równoległościanu rys.76. znajduje się na prostej łączącej środki ciężkości pól jego podstaw, czyli w punkcie przecięcia się przekątnych tego równoległościanu.

Biorac osie współrzędnych w sposób wskazany na rys.76. podzielimy równoległościan na n równych sobie części za pomocą płaszczyzn równoległych do podstaw. Oznaczymy przez $\alpha$ odległość środka ciężkości jednej z otrzymanych części od jej dolnej podstawy, wtedy współrzędne "Z" środków otrzymanych części będą odpowiednio:



Rys. 76.

$$\alpha,\ \alpha+\frac{1}{n}H,\ \alpha+\frac{2}{n}H, \ldots\ldots, \alpha+\frac{n-1}{n}\cdot H,$$

przy czym H. oznacza ogólną wysokość równoległościanu. Poniew.z

$v_i = \frac{1}{n} V$, przy czym V jest objętość równoległościanu, to $\sum_{i=1}^{n} v_i z_i = \frac{V \sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$, ale $\sum_{i=1}^{n} z_i = \alpha + (\alpha + \frac{1}{n} H) + (\alpha + \frac{2}{n} H) + \ldots + (\alpha + \frac{n-1}{n} H) =$

$$= \alpha \cdot n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} H + \frac{n-1}{n} H \right) \cdot (n-1) = \alpha n + \frac{n-1}{2} H.$$

więc mamy $\sum_{i=1}^{n} v_i z_i = V \left[ \alpha + \frac{n-1}{2n} H \right] = V \left[ \alpha + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) H \right]$, a

przechodząc do granicy przy $n = \infty$ ponieważ jest $\alpha = 0$, otrzymujemy

$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v_i z_i = \frac{1}{2} VH$, ale oczywiście, że $\sum_{i=1}^{n} v_i = V$ i $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v_i = V$,

więc ostatecznie $z_s = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i} = \frac{H}{2}$

Stąd widzimy, że środek znajduje się gdzieś na płaszczyźnie równoległej do podstaw i jednakowo od nich odległej / płaszczyzna MNPQ rys. 76 /.

Przyjmując za podstawę równoległościanu ściankę jego OADE a następnie ściankę OABK, przyjdziemy do wniosku, że środek musi znajdować się jednocześnie i na płaszczyznach $M_2 N_2 P_2 Q_2$ i $M_1 N_1 P_1 Q_1$, przeprowadzonych w podobny sposób jak płaszczyzna MNPQ; dlatego też środek S leży w punkcie ich przecięcia się przekątnych tego równoległościanu.

XI. Przykład. Ś r o d e k  c i ę ż k o ś c i  b r y ł y  j e d n o r o d n e j  k s z t a ł t u  g r a n i a s t o s ł u p a. /rys. 77/ znajduje się w środku ciężkości pola średniego przecięcia równoległego do podstaw jego albo inaczej w środku odcinka prostej, łączącej środki ciężkości pól jego podstaw.

Rozpatrzymy z początku graniastosłup o podstawie trójkątnej, a następnie i wielokątnej. Przeprowadzimy w danym graniastosłu-

pie A BCDEF średnie przecięcie PCB równoległe do podstaw i linie środkowe $K_1F$ i $K_2B$ w podstawach DEF i ABC.

POdzielimy linię środkowa średniego przecięcia KQ na dowolną liczbę n równych części,przez otrzymane punkty Y,T U Q przeprowadzimy płaszczyzny równoległe do AEDC,i na przecięciach tych płaszczyzn z bokowemi ściankami gr-pa zbudujemy równoległościany w liczbie n o krawędziach równoległych do KQ.

Objętość gr-pa możemy uważać jako granicę sumy objętosci wybudowanych równoległościanów,podczas kiedy n = .Przyjmując za podstawy równoległościanów ich ścianki,znajdujace się na płaszczyznach podstawgr-pa,i oznaczajac przez b i h Bok A C i wysokość opuszczoną na ten bok trójkata A BC,zobaczymy z łatwością,że wysokość równoległoboków sa równe $\frac{1}{n}$ h,a podstawy odpowiednio b,$\frac{n-1}{n}$b, $\frac{n-2}{n}$b,......

......,$\frac{1}{n}$ b.Wtedy suma ętościści zbudowanych równoległościanów jest równa:

$$\frac{b.h.H.}{n} + /n-1/\frac{b.h.H}{n^2} + /n-2/\frac{b.h.H}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{b.h.H.}{n^2} =$$

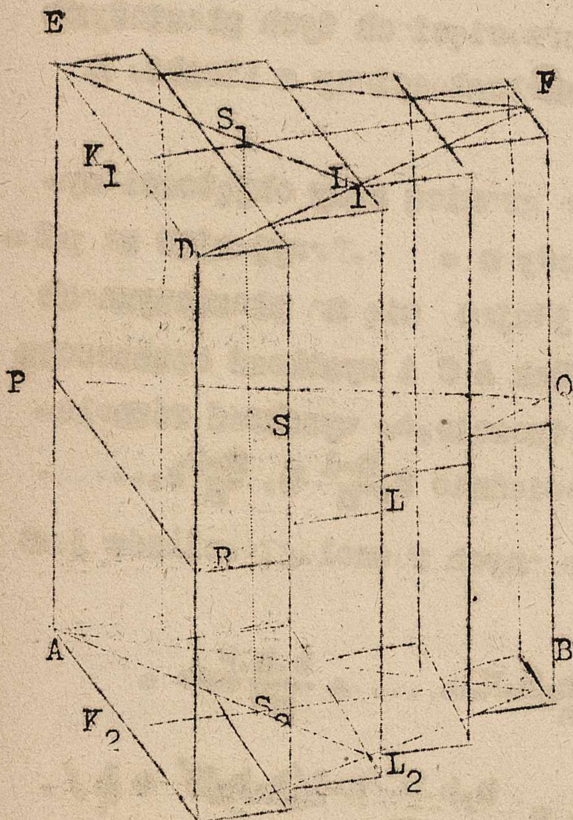
$$\frac{b.h.H}{n^2} n + /n-1/ + /n-2/ + \ldots\ldots + 1 = \frac{b.h.H./n-1/}{2n} = \frac{b.h.H}{2}/ + \frac{1}{n}/.$$

Kładąc n = otrzymujemy granicę sumy=$\frac{1}{2}$ bhH,która wyraża objętość danego graniastosłupa.Położenie więc środka ciężkości gr-pa jest granicznem położeniem środka ciężkości powyższej sumy równoległościanów.

A le środek każdego z nich znajduje się na prostej KQ; są to punkty $s_1$,$s_2$,$s_3$,......s .na rys.77;dlatego też i środek gr-pa musi znajdować się na tej prostej KQ.

Weźmiemy teraz linię środkowa PL i równoległosciany o ścianach równoległych do tej prostej PL;powtarzajac powyższe rozumowanie,przyjdziemy do wniosku,żeposzukiwany środek leży na prostej PL.

S tąd widzimy, że ten środek znajduje się w punkcie S przecięcia się tych prostych KO i PL. Ponieważ punkt S jest środkiem odcinka $S_1S_2$, łączącego środki ciężkości / patrz przykład VII/ $S_1$ i $S_2$ podstaw A BC i DEF graniostosłupa, to sprawdza się i drugie wysłowie-wienie twierdzenia i rozpatrywanego przykładu.



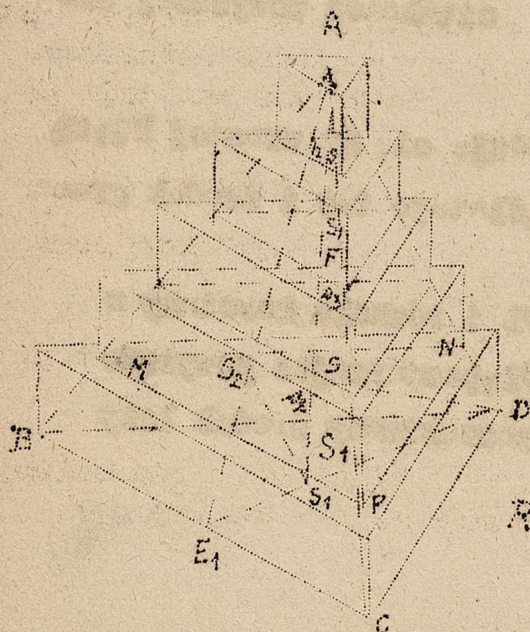
Rys. 77.

Podany dowód przeprowadzony dla gr-pa o podstawie trójkątnej z łatwością udowodnimy na dowolny gr-p, dzielac ten ostatni na gr-py trójkatne.

XII. Przykład. Ś r o d e k ciężkości b r y ł y j e d n o r o d n e j k s z t a ł t u o s t r o s ł u p a . /rys, 78./ znajduje się na prostej łaczącej wierzchołek ostrosłupa ze środkiem ciężkości podstawy jego w odległości równej 3/4 długości tej prostej od wierzchołka ostrosłupa.

Dowód podzielimy na dwie części. z początku udowodnimy w wypadku trójkątnego ostrosłupa, a następnie w wypadku wielokątowego ostrosłupa.

Przyjmiemy w danym ostrosłupie punkt A za wierzchołek, a $\triangle$ BCD za podstawę ostrosłupa. Połączymy środek $S_1$ podstawy z wierzchołkiem A i podzielimy prostą A $S_1$, na dowolną liczbę n równych części. Przez otrzymane punkty przeprowadzymy płaszczyzny, równoległe do podstawy ostrosłupa. Na podstawie i na otrzymanych przecięciach os-pa zbudujemy graniastosłupy o krawędziach bocznych równoległych do $AS_1$. Oznaczając przez H i S wysokość i pole podstawy BCD ostrosłupa, otrzymamy, że wyso-



Rys. 78.

kości graniastosłupów będą równe $\frac{H}{h}$ ,a pola ich podstaw $\frac{Sn^2}{n^2}$ , $\frac{S/n-1/^2}{n^2}$ , $\frac{S/n-2/^2}{n^2}$ ........ $\frac{S.1^2}{n^2}$ dlatego też suma objętości tych graniastosłupów będzie mogła być wyrażona wzorem $\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{SH}{n^3} n^2 + /n-1/^2 +$ $+ /n-2/^2 + \ldots\ldots + 1^2$

Obliczymy nawias kwadratowy w taki sposób:

$$/n+1/^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
$$n^3 = /n-1/ + 1 \;^3 = /n-1/^3 + 3/n-1/^2 + 3/n-1/ + 1$$
$$/n-1/^3 = /n-2/ + 1 \;^3 = /n-2/^3 + 3/n-2/^2 + 3/n-2/ + 1$$

.................................................................................

.................................................................................

$$2^3 = /1+1/^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1$$

Dodając stronami otrzymamy po redukcji wyrazów podobnych,że

$$/n+1/^3 = 1^3 + 3 \quad n^2 + /n-1/^2 + /n-2/^2 + \ldots\ldots + 1^2 \; +$$
$$+ 3 \quad n + /n-1/ + /n-2/ + \ldots\ldots\ldots + 1 \quad + \quad 1+1+1+\ldots\ldots+1 \; =$$
$$= 1 + \frac{3}{2} \; /n+1/ \; n+n+3 \quad n^2 + /n-1/^2 + /n-2/^2 + \ldots\ldots 1^2 \; ,$$

Skąd $n^2 + /n-1/^2 + \ldots\ldots + 1^2 = \frac{1}{6} \; n \, /n+1/ \; /2n+1/$ dlatego

też : $\sum_{i=1}^{n} V_1 = \frac{HS}{6n^3} n \, /n+1/ \; /2n+1/ = \frac{1}{6} \; HS \; / \; 1 + \frac{1}{n} / \; /2 + \frac{1}{n} /$ i

$$\lim_{n} \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{3} H.S \; ,$$

t.j. rzeczywiście granica sumy objętości zbudowanych graniastosłupów jest objętość danego ostrosłupa.

Ponieważ środki ciężkości poszczególnych graniastosłupów, $s_1$, $s_2$, $s_3$,.... znajdują się na prostej $AS_1$, więc na tejże prostej musi leżeć i środek ostrosłupa.-

Przyjmując następnie za wierzchołek punkt D, a za podstawę ABC, przyjdziemy analogicznie do wniosku, że poszukiwany środek ostrosłupa znajduje się na prostej $DS_2$ .A jeżeli tak, to środek ten znajduje się w punkcie S przecięcia się prostych $AS_1$ i $DS_2$.

Pozostaje wykazać, że $AS = \frac{3}{4} AS_1$; ponieważ $ES_2 = 1/3$ AE i $ES_1 =$ $1/3$ ED, to $S_1S_2$ jako równoległe do AD daje $S_1S_2 : AD = 1:3$. Podobieństwo

$SS_1S_2$ i A SD daje nam, że $SS_1 : AS = S_1S_2 : AD$ ,porównując te dwie proporcje otrzymamy, że $SS_1 : AS = 1:3$, skąd / $SS_1 + AS$ /$: AS = 4:3$ t.j. $AS = 3/4 \; AS_1$ c.b.d.o.

Gdy mamy ostrosłosłup wielokątny, to dzieląc go na ostrosłupy trójkątne w łatwy sposób uogólnimy nasze rozumowanie na ten wypadek.

XIII. Przykład. Środek ciężkości bryły jednorodnej kształtu odcinka kulistego o /rys.79./ znajduje się na średnim promieniu jego odległości od środka kuli, równej ilorazowi kwadratu pola podstawy odcinka kulistego i poczwórnego iloczynu objętości odcinka kulistego i liczby $\pi$.

Dany odcinek kulisty ABGD otrzymujemy obracając odcinek kołowy ABG dookoła osi OB. Ponieważ OB jest osią symetrii więc poszukiwany środek musi znajdować się na tej prostej.

Weźmiemy osie współrzędnych tak, aby początek był w środku kuli, a oś OX była zgodną z prostą OB. Podzielimy wysokość odcinka kulistego H na m równych części i przez otrzymane punkty przeprowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy tego odcinka AG, otrzymamy wtedy objętości n, $v_1, v_2, v_3 \ldots \ldots v_n$, oznaczając przez $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, współrzędne środków ciężkości $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$, tych objętości będziemy mieli, że

$$x_s = \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$$

Rys.79.

Oznaczymy jeszcze przez V objętość naszego odcinka kulistego, przez d odległość OD między jego podstawą i środkiem kuli, a przez $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$ odpowiednie odległości $DS_1, D_1S_2, D_2S_3, \ldots D_{n-1}S_n$. Wtedy możemy napisać, że:

$$x_1 = d+d_1, \; x_2 = d + \frac{1}{n} H + d_2, \; x_3 = d + \frac{2}{n} H + d_3, \ldots x_n = $$
$$= d + \frac{n-1}{n} H + d_n$$ skąd wynika, iż

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = v_1 /d+d_1/ + v_2 /d + \frac{1}{n} H + d_2/ + v_3 /d + \frac{2}{n} H + d_3/ + \ldots \ldots v_n /d + \frac{n-1}{n} H + d_n/ =$$
$$= /v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n/d + /v_1d_1+v_2d_2+\ldots+v_nd_n/ + \frac{1}{n} H \; v_2+2v_3+3v_4+\ldots/n-1/$$

Ale $v_1+v_2+v_3+\ldots v_n = V$; dalej, jeż i w drugim wyrazie zamienimy $d_1, d_2, \ldots d_n$, przez największą z pośród nich, którą niech np. będzie e

$d_o$, to otrzymamy $(v_1+v_2+\ldots v_n)d_o = Vd_o$ -wyrażenie większe od rozpatrywanego; dlatego też aby otrzymać rozpatrywany wyraz, pomnożymy iloczyn Vd przez pewien ułamek właściwy dodatni, wtedy $v_1d_1+v_2d_2+\ldots\ldots v_nd_n = V.d_o.\vartheta$ przyczym $0<\vartheta<1$.

Obliczymy teraz wyrażenie znajdujące się w nawiasie kwadratowym. Możemy go tak napisać:

$$S=(v_2+v_3+v_4+\ldots\ldots v_n)+(v_3+v_4+\ldots\ldots+v_n)+(v_4+\ldots+v_n)+$$

$$+\ldots\ldots+(v_{n-1}+v_n)+v_n$$ ,ale otrzymane nawiasy wyrażają objętości odcinków kulistych $A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3,\ldots\ldots,A_nBC_n$, dlatego też oznaczając przez R promień kuli, będziemy mieć:

$$v_{k+1}+\ldots\ldots+v_n=\pi\left(H-\frac{k}{n}H\right)^2.\left(R-\frac{1}{3}\left(H-\frac{k}{n}H\right)\right)=\pi R\left(H-\frac{k}{n}H\right)^2-$$
$$-\frac{\pi}{3}\left(H-\frac{k}{n}H\right)^3=\frac{\pi RH^2}{n^2}(n-k)^2-\frac{\pi H^3}{3n^3}(n-k)^3$$ gdzie k

przebiega od 1 do n-1;

$$\text{Więc } S=\frac{RH^2\pi}{n^2}\left[(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2\right]-\frac{\pi H^3}{3n^3}\left[(n-1)^3+\right.$$
$$\left.+(n-2)^3+\ldots\ldots+1^3\right]$$. Z poprzedniego wynika, że /przykład XII/

$$(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots\ldots+1^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

podobnie znajdziemy, że $(n-1)^3+(n-2)^3+\ldots+1^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$

Mamy wtedy $S=\frac{\pi RH^2(n-1)(2n-1)}{6n}-\frac{\pi H^3(n-1)^2}{12n}$

Wstawiając otrzymane wyrazy do wyrażenia na $\sum_{i=1}^{n} v_ix_i$ znajdziemy:

$$\sum_{i=1}^{n} v_ix_i=V(d+d_o\vartheta)+\frac{\pi RH^3(n-1)(2n-1)}{6n^2}-\frac{\pi H^4(n-1)^2}{12n^2}=$$
$$=V(d+d_o\vartheta)+\frac{1}{6}\pi RH^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\pi H^4\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,$$

Oczywiście, że $d_o=0$, gdy $n=\infty$, skąd $\lim\sum_{i=1}^{n} v_ix_i=Vd+\frac{1}{3}\pi RH^3-\frac{1}{12}\pi H^4$,

ale $V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)$ i $d=R-H$ więc $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v_ix_i=$

$$=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)(R-H)+\frac{1}{3}\pi RH^3-\frac{1}{12}\pi H^4=\frac{1}{4}\pi H^2(4R^2-4RH+H^2)=$$
$$=\frac{1}{4}\pi\left[H(2R-H)\right]^2.$$

Łatwo przekonujemy się, że $H(2R-H)=DC^2$, t.j. kwadratowi promienia podstawy odcinka kulistego, na zasadzie tego

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = \frac{\pi}{4} DC^4 .$$

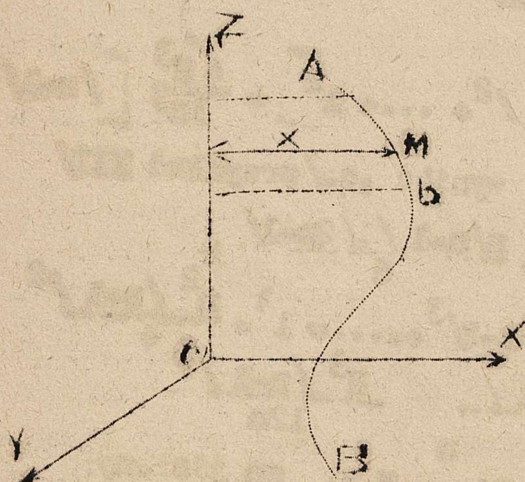
Wstawiając te wyrażenia we wzór na $X_s$ i zauważywszy, że

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v_i = V$, otrzymujemy ostatecznie, że

$$X_s = \frac{\frac{\pi}{4}.DC^4}{V} = \frac{\left(\pi.\overline{DC}^2\right)^2}{4.\pi V} \quad \text{c.b.d.o.}$$

Udowodnimy dwa twierdzenia Gildin'a o powierzchniach i objętościach brył obrotowych.

I Twierdzenie G u l d i n 'a . P o l e p o w i e r z c h n i o b r o t o w e j u t w o r z o n e j p r z e z o b r a c a n i e p ł a s k i e j k r z y w e j d o o k o ł a o s i w j e j p ł a s z c z y ź n i e l e ż ą c e j i j e j /krzywej/ n i e p r z e c i n a j ą c e j , r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i d ł u g o ś c i k r z y w e j t w o r z ą c e j i d ł u g o ś c i k o ł a z a k r e ś l o n e g o p r z e z ś r o d e k c i ę ż k o ś c i t w o r z ą c e j p r z y t y m k r z y w ą t w o r z ą c ą i p o w i e r z c h n i ę p r z e z n i ą u t w o r z o n ą u w a ż a m y z a j e d n o r o d n ą. rys.80.




Rys.80.

Przypuśćmy, że płaszczyzna rys. 80 jest tą płaszczyzną, w której znajduje się dana krzywa AB; przyjmiemy tę płaszczyznę za płaszczyznę współrzędnych XOZ, przy czym niech oś OZ będzie zgodna z osią obrotu.

Oznaczymy przez dl element ab krzywej AB, a przez x współrzędną środka M odcinka ab, wtedy element powierzchni obrotowej ds, utworzony przez obrót elementu krzywej dl, wyrazi się za pomocą wzoru: $dS = 2\pi\, x dl$, ponieważ ta powierzchnia będzie powierzchnią ściętego stożka lub walca obrotowego.

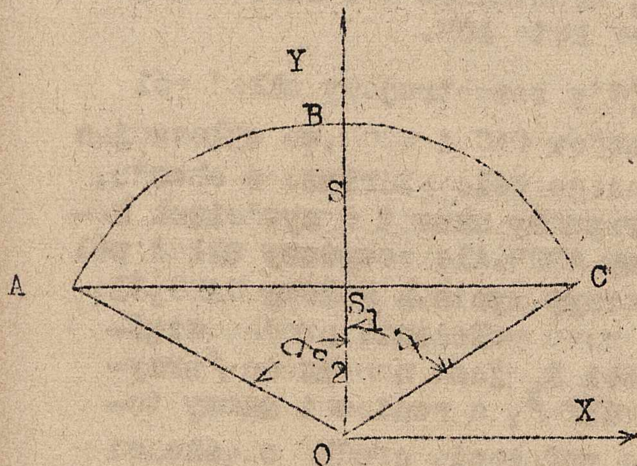
Powierzchnia S utworzona przez całą krzywą AB, będzie równać się $S = \int_A^B dS = 2\pi\int_A^B x dl$, przy czym całka określona jest rozciągnięta na całą długość krzywej AB.

Ale wiemy, że $x_s = \dfrac{\int_A^B x dl}{\int_A^B dl}$ więc $\int_A^B x dl = x_s \int_A^B dl = x_s . L$,

przy czym L oznacza ogólną długość krzywej AB.

Wstawiając w wyrażenie na S otrzymaną wartość dla $\int_A^B x\,dl$ będziemy mieli, że $S=2\pi\cdot x_s L$, ta równość wyraża twierdzenie Guldin'a c.b.d.o.

II. Twierdzenie Guldin'a. Objętość bryły obrotowej utworzonej przez obracanie płaskiego obwodu zamkniętego dookoła osi, leżącej w płaszczyźnie tego obwodu i jego /obwodu/ nieprzecinającej równa się iloczynowi pola zawartego w danym obwodzie i długości koła zakreślonego przez środek ciężkości pola tego obwodu, przy czym pole obracającego się obwodu i bryłę obrotową przez niego utworzoną uważamy za jednorodne /Rys.81./




Rys.82.

Biorąc osie współrzędnych podobnie jak w twierdzeniu I, oznaczymy przez dS element pola danego obwodu ABCD, przez dV odpowiadający mu element objętości bryły obrotowej, przez S pole całego obwodu, przez V objętość całej bryły obrotowej, i wreszcie przez /x,y/ współrzędne punktu M pola obwodu ABCD, wtedy $dV=\pi(x+dx)^2dz-\pi x^2.dz$, ponieważ dV jest objętością walcowego pierścienia, a $dx = MN$ i $dz = MQ$ w elemencie dS.

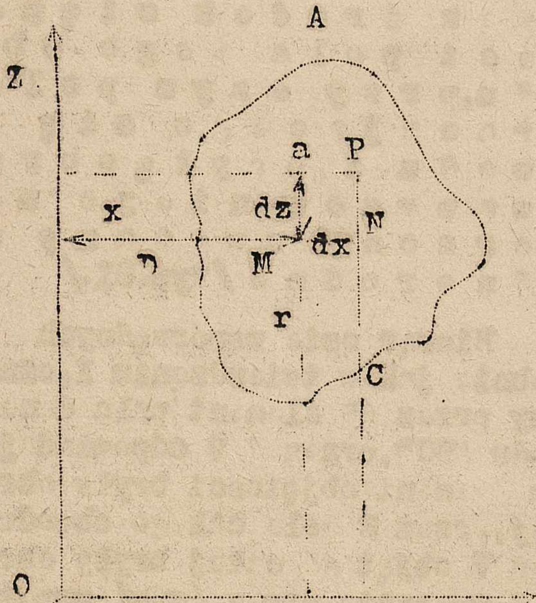
Po redukcji wyrazów podobnych, otrzymamy, że $dV = \pi 2\,x\,dx\,dz + \pi\,dz\,(dx)^2$, pomijając wyraz drugi jako rzędu wyższego względem wyrazu pierwszego, i zamieniając w wyrazie pierwszym dx.dz przez dS otrzymamy $dV=2\pi\,x.dS$,

całkując następnie obie części otrzymanego wzoru wzdłuż całego pola danego obwodu S będziemy mieli, $V=2\pi\int_S x\,dS$

ale wiemy, że $x_s = \frac{\int_S x\,dS}{S}$, skąd $\int_S x\,dS = x_s\int_S dS$. Dlatego też $V= 2\pi x_s S$. c.b.d.o.

Zastosowania powyższych twierdzeń Guldin'a mogą być dwóch rodzajów /1 do wyznaczenia powierzchni i objętości brył obrotowych otrzymywanych z linii i obwodów, posiadających znane nam środki ciężkości i 2/ do wyznaczenia położenia środka ciężkości linii i pól obwodów, dostarczających nam podczas obrotu takich powierzchni i objętości brył, które są nam znane z geometrii.

XIV. Przykład. Środek ciężkości jednorodnego pola kołowego odcinka /rys. 82/. Niech ABCD jest dany odcinek kołowy ze środkiem O, promieniem R i łukiem $\widehat{AC} = 2.\widehat{AB} = 2\alpha R$, przyczem $\alpha$ jest miara łukowa kąta AOB.




Rys. 81.

A3/ Gdy rozpatrujemy układ pól obwodów OAC i ABCD, to wyłączając z niego pole pierwszego obwodu, otrzymamy akurat dany odcinek kołowy ABCD. Ale powyższy układ pól tworzy wycinek kołowy CABC, dla którego położenie środka ciężkości $S_1$ jest nam znane /przykład IX/, a ponieważ znamy także położenie środka ciężkości $S_2$ pola, zawartego w wyłączonym obwodzie t.j. pola trójkąta OAC, to posiadamy wszystkie dane niezbędne do zastosowania twierdzenia VI-go.

Wiemy, że $OS_1 = \frac{2}{3} R \frac{\overline{AC}}{\smile AC} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{2R \sin\alpha}{2\alpha R} = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

oprócz tego na zasadzie przykładu VII, $OS_2 = \frac{2}{3} OD = \frac{2}{3} R \cos\alpha$. Posługując się tymi danymi, otrzymujemy, że $S_1S_2 = OS_1 - OS_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha}$.

Chociaż według twierdzenia VI-go musimy znać stosunek wagi pola OAC do wagi pola odcinka kołowego ABCD, ale z powodu jednorodności tych pól powyższy stosunek możemy zamienić stosunkiem pola OAC do pola odcinka kołowego ABCD.

Wziąwszy pod uwagę, że powyższe pola wyrażają się odpowiednio wzorami: $R^2 \sin\alpha\cos\alpha$ i $R^2\alpha - R^2 \sin\alpha\cos\alpha$, otrzymamy na odległość

środka ciężkości S odcinka kołowego od środka ciężkości $S_1$ wycinka kołowego na podstawie twierdzenia VI-go następujący wzór:

$$SS_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha - \alpha \cos\alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^2 \sin\alpha \cos\alpha}{R^2\alpha - R^2 \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$= \frac{2}{3} R \frac{/\sin\alpha - \cos\alpha/ \sin\alpha \cos\alpha}{\alpha/\alpha - \sin\alpha \cos\alpha/}$$ a dlatego

$$OS = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha/ \sin\alpha - \cos\alpha}{\alpha/\alpha \sin\alpha \cos\alpha/} =$$

$$= \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha/\alpha - \sin\alpha \cos\alpha/} \left[\alpha - \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha/\sin\alpha - \alpha \cos\alpha/\right]$$

Ponieważ wyraz znajdujący się w nawiasie kwadratowym łatwo sprowadza się do $\sin^2\alpha$, to: $OS =$

$$\overline{OS} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}$$ Ten wzór

określa położenie na promieniu, dzielącym łuk danego odcinka kołowego na pół, środka ciężkości pola jednorodnego odcinka kołowego.

B/. Ten sam rezultat otrzymamy, stosując drugie twierdzenie Guldin'a;

Rzeczywiście, gdy obracamy dany odcinek kołowy dookoła osi OX, to objętość otrzymanej przy tem bryły obrotowej /kształtu warstwy kulistej, z której jest wykrajany walec obrotowy/ łatwo obliczymy według wzorów geometrii elementarnej, a mianowicie:

$$V = \frac{4 R^3 \sin^3}{3},$$

ponieważ zaś pole odcinka kołowego, które oznaczamy przez S, jest: $S = R^2\alpha - R^2 \sin\alpha \cos\alpha$ to wstawiając otrzymane wyrażenie do wzoru $V = 2\pi x_s S$, będziemy mieć:

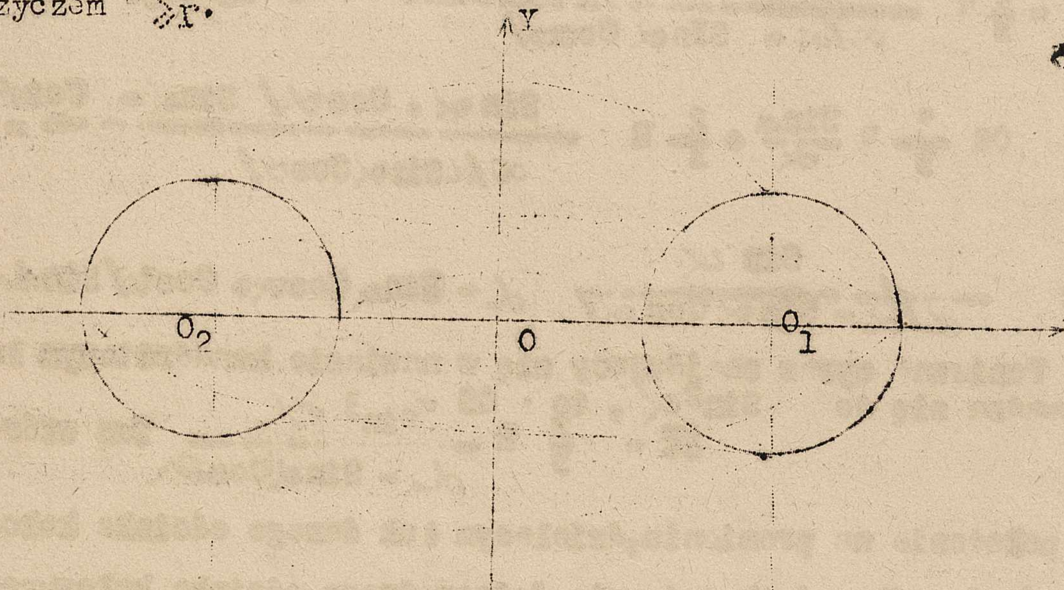
$$\frac{4}{3} \pi R^3 \sin^3\alpha = 2\pi x_s/R^2\alpha - R^2 \sin\alpha \cos\alpha/,$$ skąd określimy $x_s = OS$.

$$x_s = OS = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha},$$ a więc ten sam wzór co i wyżej.

XV.Przykład.Określić pole powierzchni i objętość bryły obrotowej,powstającej od obracania koła dookoła osi,leżącej w płaszczyźnie tego koła i odległej od środka jego na długość nie mniejszą od promienia koła/ rys.83/./ciało takie nazywane jest t o r e m/.

Rozwiązanie otrzymujemy za pomocą twierdzenia Guldin'a.

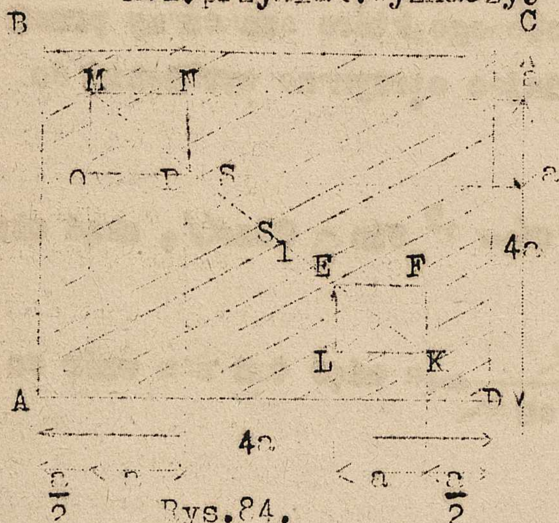
rzeczywiście niech dane koło posiada środek w punkcie $O_1$, a promień jego jest ,odległość osi obrotu OY od $O_1$ oznaczymy przez R,przyczem $R \geq r$.




Rys.83.

Wiedząc,że środek ciężkości zarówno obwodu koła,jak i pola jego znajduje się w jego środku geometrycznym,t.j.w punkcie $O_1$,przychodzimy do wniosku,że długość obwodu koła ,zakreślonego przez punkt $O_1$ jest $2\pi R$, ponieważ obwód i pole danego koła są $2\pi r$ i $\pi r^2$ to twierdzenia Guldin'a dadzą nam: $S=4\pi^2 R$ i $V = =2\pi^2$ R.

XVI.przykład.Wyznaczyć środek ciężkości bryły jednorodnej,kształtu graniastosłupa prostego,którego średnie przecięcie równoległe do podstawy,jest przedstawione na rys.84. postaci figury pokrytej kreskami,wymiary są podane na rys.84.




Rys.84.

Widzimy,że gdy z graniastosłupa o podstawie ABCD wyłączymy graniostosłup o podstawie EFKL,to otrzymamy

dany nam gr-p, dlatego też w tym przykładzie możemy zastosować twierdzenie VI.

Ponieważ zaś w przykładzie XIV korzystaliśmy już z powyższego twierdzenia, to w tym wypadku zastosujemy twierdzenie V. W tym celu wyłączymy z gr-pa o podstawie ABCD, oprócz gr-pa o podstawie EFKL, jeszcze gr-p o podstawie MNPQ; otrzymaną przytem bryłę oznaczymy przez T. oczywiście, że dołączając do bryły T gr-p o podstawie MNPQ, otrzymamy daną bryłę.

Ponieważ bryła T jest symetryczną względem punktu $S_1$, leżącego w środnim jej przecięciu, to ten punkt $S_1$ właśnie będzie środkiem ciężkości bryły T; środek ciężkości gr-pa o podstawie MNOQ znajduje się w punkcie $S_2$ tegoż przecięcia średniego.

Na zasadzie twierdzenia V-go, dołączenie do bryły T gr-pa o podstawie MNOQ wywoła przesunięcie środka ciężkości $S_1$ do pewnego punktu S, przyczem $S_1S = S_1s_2\frac{G_2}{G}$; stosunek wag możemy zastąpić stosunkiem objętości, ponieważ bryły są jednorodne, stosunek zaś objętości jest równy stosunkowi pól podstaw, bo wysokości obu graniastosłupów są sobie równe, więc

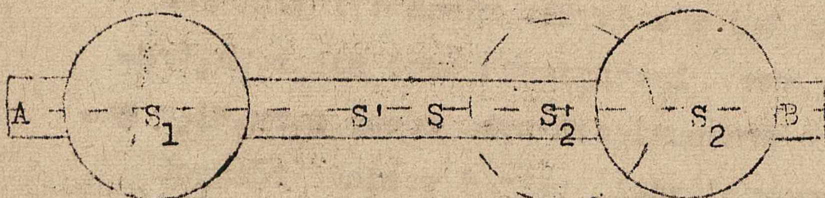
$$\frac{G_2}{G} = \frac{a^2}{(4a)^2 - a^2} = \frac{1}{15}$$ , ale oprócz tego $S_1S_2 = \frac{1}{4} \cdot 4a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

otrzymujemy po wstawieniu wyrażenie na $S_1s_2$: $S_1S = \frac{a\sqrt{2}}{15}$

Wzór ten po wstawieniu na przekątnej położenie poszukiwanego środka S.

XVII. Przykład. Na pręcie AB o długości 180 cm. i o wadze 2 kg. nasadzone są dwie kule, ważące każda 8 kg w taki sposób, że środki tych kul są oddalone od środka prętu o 54 cm w jedną i drugą stronę. Wyznaczyć środek ciężkości powyższego układu i określić dokąd on się przesunie w lewo o długość równą 27 cm /rys. 85/.

Gdy środki kul znajdują się w punktach $S_1S_2$, to środek ciężkości całego układu znajduje się w środku geometrycznym S pręta AB, ponieważ układ nasz jest symetryczny względem tego punktu. Gdy przesuniemy prawą kulę w lewo, to na




Rys. 85.

zasadzie twierdzenia VII, środek ciężkości S przesunie się też w lewo i zajmie położenie S';nowe położenie środka $S_2$ jest $S_2$'', wtedy $SS' : = S_2S_2' = 8 \cdot 18$, ale $S_2S'_2 = 27$, więc $SS' = \frac{27 \cdot 8}{18} = 12$cm. Zatem środek układu przesunie się w lewo o długość =12cm.

Podobnie rozwiążemy następujące zadanie:

1/ Środek ciężkości jednorodnej powierzchni warstwy kulistej znajduje się w środku prostej łączącej środki podstaw warstwy.

2/ Środek ciężkości jednorodnej bocznej powierzchni prostego gr-pa znajduje się w środku prostej łączącej środki ciężkości podstaw graniastosłupa; w tymże punkcie znajduje się środek ciężkości całej powierzchni gr-pa.

3/. Środek ciężkości jednorodnej bocznej powierzchni foremnego ostrosłupa, a także i prostego stożka obrotowego znajduje się na prostej, łączącej wierzchołek ostrosłupa lub stożka ze środkiem ciężkości podstawy, w odległości od podstawy równej 1/3 długości wymienionej prostej.

4/. Środek ciężkości bryły jednorodnej kształtu wycinka kulistego znajduje się na średnim jego promieniu w odległości od środka kuli równej $\frac{3}{8}(2R - h)$, przyczem R jest promień kuli, a h oznacza wysokość odcinka kulistego, wchodzącego w skład danego wycinka kulistego.

## §3. Zastosowanie zasady możliwych przesunięć.

Rozpatrujemy teraz ile równań równowagi daje nam zasada możliwych przesunięć. Według tej zasady dla równowagi jest koniecznym i wystarczającym, aby suma algebraiczna prac sił zewnętrznych podczas każdego możliwego przesunięcia była równą zeru. Więc zasada daje nam tyle równań równowagi, wiele układ posiada różnych możliwych przesunięć. Jako możliwe różne przesunięcie uważamy tem które nie mogą być sprowadzone albo zastąpione jedne przez dru-

gie.Gdy zaś otrzymamy przesunięcie,które może być zastąpione przez kilka przesunięć poprzednich,to takie przesunięcie nie będzie różne od poprzednich,lecz sprowadzające się do nich.Takie przesunięcie nie da nam nowego warunku równowagi,lecz równanie równoważne do poprzednich równań równowagi.

Dlatego też liczba równań równowagi układu materialnego jest równa liczbie niesprowadzających się do siebie możliwych przesunięć układu,tę liczbę n a z y w a m y  l i c z b ą  s t o p n i  s w o b o d y  u k ł a d u.

Przypuśćmy,iż mamy swobodny układ materialny,który rozpatrujemy jako niezmienny układ punktów materialnch.Wszystkie możliwe przesunięcia tego układu można zastąpić dwiema następującemi grupami: ruchem postępowym w pewnym kierunku i ruchem obrotowym dookoła pewnej dowolnie skierowanej osi chwilowej t.j. takiej,obrót dookoła której trwa nieskończenie krótko.

Weźmiemy trzy prostopadłe osie współrzędnych OX,OY,OZ. Wiadomo jest ,iż każdy ruch postępowy może być rozłożony na trzy ruchy obrotowe dookoła trzech osi współrzędnych.

Więc dowolne,nieskończenie małe przesunięcie układu materialnego może być rozłożone na sześć elementarnych przesunięć składowych,mianowicie trzech przesunięć postępowych w kierunku osi współrzędnych i trzech przesunięć obrotowych dookoła tychże osi współrzędnych OX,OY,i OZ.Te sześć elementarnych przesunięć składowych są niesprowadzające się do siebie,t.j.nie mogą być zastąpione jedne przez drugie.Dlatego też s w o b o d n y  u k ł a d  m a t e r i a l n y  p o s i a d a  s z e ś ć  w a r u n k ó w,czyli r ó w n a ń  r ó w n o w a g i,które są konieczne i wystarczające do równowagi tego układu.

Aby otrzymać te równania równowagi,rozpatrzymy kolejno wymienione sześć przesunięć.

Podczas przesunięcia postępowego,w kierunku osi współrzędnych OX,wszystkie punkty układu materialnego przesuną się

o jedną i tę samą odległość, oznaczymy ją przez $\delta x$. Następnie przez $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ oznaczymy rzuty na oś OX sił zewnętrznych $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots S_n$, działających na układ. Wyrazami na pracę tych sił podczas rozpatrywanego przesunięcia będą odpowiednio:

$$X_1 \delta x\ ;\ X_2 \delta x;\ X_3 \delta x; \ldots\ldots\ldots, X_n \delta x.$$

Oznaczając przez $\sum_{i=1}^{n} X_i \delta x$ ich sumę algebraiczną, to na podstawie zasady możliwych przesunięć będziemy mieli równanie równowagi $\sum_{i=1}^{n} X_i \delta x = 0$, czyli wynosząc wspólny czynnik $\delta x$ po za znak sumy otrzymujemy: $\sum_{i=o}^{n} X_i = 0.$

Ten warunek wypowiadamy w ten sposób. Suma algebraiczna rzutów sił zewnętrznych na oś OX musi być równa zeru. Podobne równania równowagi otrzymamy analogicznie dla współrzędnych OY, i OZ:

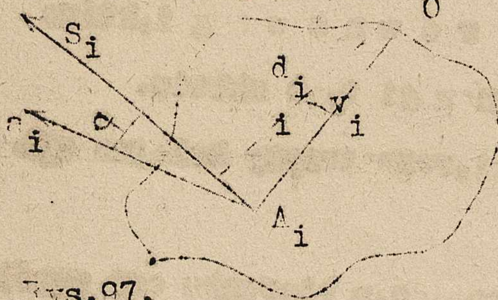
$$\sum_{i=1}^{n} {}_i = 0 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

Możemy więc krótko powiedzieć, iż dla równowagi układu jest rzeczą konieczną, aby główny wektor sił zewnętrzych, działających na ten układ, był równy zeru t.j. $W_g = 0$

$$\text{czyli } W_{gx} = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad W_{gy} = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0,$$

$$W_{gz} = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

Podczas przesunięcia obrotowego dookoła pewnej osi O / /rys.97/ dowolny punkt układu $A_i$ / $i = 1,2,3,\ldots.n$/ przesunie się do położenia $a_i$ przytem wykona przesunięcie $A_i a_i$, to nieskończenie małe przesunięcie jest prostolinijne zawarte w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu O, prostopadłe do kierunku promienia $r_i$ punktu $A_i$ i wreszcie proporcjonalne do wielkości tego promienia . W spółczynnikiem propor-



Rys.97.

cjalności jest nieskończenie mały kąt obrotu układu /bryły/ dookoła osi O, jeżeli oznaczymy go przez $\delta\omega$ to długość przesunięcia $A_i a_i$ będzie $r_i . \delta\omega$. $A_i a_i \cong A_i n_i$ /w przybliżeniu do wielkości małych 2-go rzędu/.

Aby wyznaczyć pracę siły $S_i$ działającej na punkt $A_i$ układu, podczas tego przesunięcia rozłożymy siłę $S_i$ na dwie siły składowe, w ten sposób, aby jedna siła składowa była równoległą do osi O, a druga $S'_i$ zawarta w płaszczyźnie, prostopadłej do tej osi i przechodzącej przez punkt $A_i$. Wtedy ta druga siła składowa będzie rzutem siły $S_i$ na tę płaszczyznę. Praca pierwszej składowej, jako równoległej do osi obrotu, podczas rozpatrywanego przesunięcia będzie równa zeru. Praca drugiej siły składowej $S'_i$ podczas tego przesunięcia będzie: $S'_i . A_i a_i . \cos\alpha_i = S'_i \, r_i . \delta\omega \cos\alpha_i$, przy czym $\alpha_i$ jest kątem pomiędzy prostą działania siły $S_i$ i przesunięcia $A_i a_i$. Ale rys. 97. $OC = d_i = r_i . \cos\alpha_i$ więc poprzedni wzór na pracę piszemy tak: $S'_i \delta\omega . d_i$. Mamy tu iloczyn dwu czynników; rzutu $S_i'$ na płaszczyznę prostopadłą do osi O obrotu siły $S_i$ i najkrótszej odległości, $OC = d_i$ pomiędzy prostą działania siły $S_i$ i osią O. Ten iloczyn jest więc momentem statycznym siły $S_i$ względem osi O /patrz rozdział V/, oznaczymy go jak zwykle przez $M_i$, wtedy: $M_i = S_i . d_i$.

Praca siły $S_i$ podczas przesunięcia obrotowego naszego układu o kąt $\delta\omega$, będzie ostatecznie: $M_i \delta\omega$.

Wyznaczając analogicznie pracę wszystkich pozostałych sił zewnętrznych $S_2, S_3, \ldots, S_n$ podczas rozpatrywanego przesunięcia obrotowego o kąt $\delta\omega$ i biorąc ich sumę algebraiczną, otrzymamy: $\sum_{i=1}^{n} M_i \delta\omega$. Po wyniesieniu wspólnego czynnika $\delta\omega$ po znak sumy, będziemy mieli, iż suma algebraiczna prac cząsteczkowych /elementarnych/ sił zewnętrznych, podczas przesunięcia obrotowego o kąt $\delta\omega$ dookoła osi O, wyraża się iloczynem: $\delta\omega \sum_{i=1}^{n} M_i$.

Na podstawie zasady możliwych przesunięć, ta suma musi być równa zeru: $\delta\omega \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$, skąd otrzymujemy równanie czyli warunek równowagi: $\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$.

Ten warunek wysłowimy tak: suma algebraiczna momentów statycznych względem osi O musi być równa zeru.

Stosując otrzymane równanie do trzech osi współrzędnych OX,OY,OZ, otrzymamy trzy konieczne warunki równowagi układu materialnego:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0.$$

Możemy więc krótko powiedzieć, iż dla równowagi układu jest niezbędne, aby główny moment statyczny zewnętrznych sił, działających na ten układ, był równy zeru, t.j.

$$M_g = 0, \text{czyli: } M_{gx} = \sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0, \quad M_{gy} = \sum_{i=1}^{n} M_{yi} = 0, \quad M_{gz} = \sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0.$$

Zestawiając te trzy równania z otrzymanymi wyżej trzema równaniami, będziemy mieli sześć równań czyli warunków koniecznych i wystarczających dla równowagi swobodnego układu materialnego posiadającego sześć stopni swobody. Otrzymaliśmy więc, opierając się na zasadzie możliwych przesunięć, znane nam już warunki równowagi, układu, wyprowadzone poprzednio na zupełnie innych podstawach/patrz rozdział VI.§.2/.

W pierwszych rozdziałach niniejszego kursu, wyłożyliśmy statykę niezmiennej bryły materialnej, podaliśmy wtedy definicję równoważnych układów sił. Mianowicie, nazwali my dwa układy sił równoważnemi, gdy jeden z nich może być zastąpiony przez drugi, bez naruszenia równowagi bryły materialnej/patrz rozdz. I/ Pojęcie to o równoważnych układach może być rozciągnięte na dowolny układ materialny, posiadający n i e s z e ś ć stopni swobody, l e c z mniej.

Przypuśćmy, iż na układ działają siły zewnętrzne, podzielimy je na dwie grupy: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_e$ i $S_1', S_2', S_3', \ldots S_m'$ i wyobraźmy sobie, że te siły wzajemnie się równoważą. Oznaczając przez $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3, \ldots \delta s_e, \delta s_1', \delta s_2', \delta \ldots, \ldots \delta s_m'$ odpowiednio możliwe przesunięcia ich punktów zaczepienia, otrzymamy równanie równowagi w postaci:

$$S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_2 + \ldots + S_e \delta s_e + S_1' \delta s_1' + S_2' \delta s_2' + \ldots + S_m' \delta s_m' = 0,$$

przyczem liczba takich równań jest równa liczbie niesprowadza-

jacych się możliwych przesunięć układu materialnego, t.j. liczbie stopni swobody tego układu.

Przypuśćmy, iż istnieje taki układ sił $S''_1, S''_2, \ldots S''_n$, iż suma algebraiczna ich prac podczas możliwych przesunięć punktów ich zaczepienia równa się sumie algebraicznej prac sił $S'_1, S'_2, \ldots \ldots, S'_m$, podczas ich możliwych przesunięć t.j., iż zachodzą równości

$$S''_1 \; s''_1 + S''_2 \; s''_2 + \ldots \ldots + S''_n \; s''_n = S'_1 \; s'_2 + S'_2 \; s'_2 + \ldots S'_m \; s'_m$$

dla każdego ich możliwego przesunięcia. Zauważymy, że siły tych grup mogą się różnić ilością $/n \neq m/$, kierunkami, wartościami liczebnymi i punktami zaczepienia. Oczywiście, możemy zamienić grupę sił $S'_1, \ldots\ldots, S'_m$ przez grupę $S''_1, \ldots S''_n$, bez naruszenia równowagi układu, ponieważ warunek zasady możliwych przesunięć będzie nadal spełniony. Rzeczywiście, cała różnica będzie polegała na tym, że zamiast równań równowagi $S_1 \; s_1 + S_2 \; s_2 + \ldots\ldots S_e \; s_e + S'_1 \; s'_1 + S_2 \; s_2 + \ldots\ldots\ldots + S'_m \; s'_m = 0$ otrzymamy równania:

$$S_1 \; s_1 + S_2 \; s_2 + \ldots S_e \; s_e + S''_1 \; s''_1 + S''_2 \; s''_2 + \ldots\ldots + S''_n \; s''_n = 0$$

równoważne do poprzednich. Stąd otrzymujemy twierdzenie:

Dwa układy sił są równoważne, gdy sumy algebraiczne prac tych sił układów podczas każdego możliwego przesunięcia układu materialnego, są sobie równe.

To twierdzenie wyraża ogólne prawo równoważności dwóch układów sił, działających na dowolny układ materialny. Zastosujemy to ogólne twierdzenie do kilku szczególnych wypadków.

W wypadku swobodnej bryły materialnej, posiadającej sześć stopni swobody mamy sześć niesprowadzających się możliwych przesunięć, zawartych w dwóch grupach po trzy w każdej: trzy posunięcia postępowe i trzy przesunięcia obrotowe dooł trzech osi współrzędnych. Dla każdego z tych możliwych przesunięć równoważne układy sił powinny dać ró[illegible]ne sumy algebraiczne prac, otrzymujemy wtedy sześć warunków równoważności układów sił. Dla przesunięcia postępowego $\delta x$ w kierunku osi OX, suma algebraiczna prac sił układu będzie równa iloczynowi sumy algebraicznej rzutów sił tego układu na oś OX i przesunięcia

$$\delta x: \delta x \sum_{i=1}^{n} X_i = \delta x . Wgx.$$

Suma algebraiczna prac sił drugiego układu podczas tego przesunięcia, analogicznie będzie: $\delta x W'gx$. Stąd otrzymujemy pierwszy warunek równoważności układów $W'gx=Wgx$.

Dwa inne waruhki pierwszej grupy będą: $Wgy=W'gy$ i $Wgz=W'gz$.

Dla przesunięcia obrotowego dookoła osi OX o kąt $\delta\omega$, suma algebraiczna prac sił układu będzie równa iloczynowi sumy algebraicznej momentów sił względem osi OX i kata obrotu $\delta\omega$ :

$$\delta\omega\sum_{i=1}^{n} Mx_i = \delta\omega\, Mgx.$$

Suma algebraiczna prac sił drugiego układu podczas tego przesunięcia będzie: $\delta\omega$ M'gx. Stad otrzymujemy pierwszy warunek drugiej grupy: Mgx=M'gx. Dwa inne warunki drugiej grupy będą: Mgy=M'gy i Mgz=M'gz.

Czyli na to aby dwa układy sił, działających na swobodną bryłę materialna, były równoważnymi p o t r z e b a i w y s t a r c z a , a b y te u k ł a d y s i ł p o s i a d a ł y j e d n a k o w e g ł ó w n e w e k t o r y i j e d n a k o w e g ł ó w n e m o m e n t y s t a t y c z n e : Wg = W'g i Mg = M'g.

W wypadku nieswobodnej bryły materialnej, np. bryły obracajacej się dookoła osi OZ, mamy tylko jedno możliwe przesunięcie na które pozwala połaczenie układu, t.j. oś obrotu. Mamy więc w tym wypadku tylko jeden stopień swobody i równoważne układy sił musza spełniać tylko jeden warunek, mianowicie: Mgz=M'gz.

Podobnie możemy wyznaczyć warunki równoważności dwóch układów sił i dla innych wypadków nieswobodnej bryły materialnej.

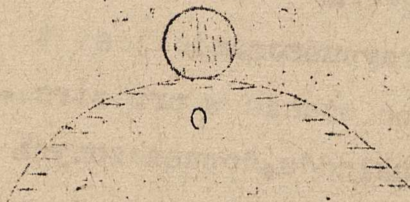
Ogólne prawo równoważności dwóch układów sił pozwala nam z łatwościa udowodnić, i ż u k ł a d z ł o ż o n y z j e d n e j p a r y s i ł , n i e m o ż e b y ć r ó w n o w a ż n y u k ł a d o w i , z ł o ż o n e m u z j e d n e j s i ł y. /patrz rozdział II, § 4 twierdzenie I./. Rzeczywiście praca cząsteczkowa pary sił jest równa zeru, podczas każdego przesunięcia postępowego, ponieważ praca jest jednej z sił jest równą co do wartości bezwzględnej, lecz przeciwna co do znaku pracy drugiej pary sił. A praca czasteczkowa jednej siły podczas każdego przesunięcia postępowego, będzie równa zeru. Stad widzimy, i ż p a r a s i ł n i e m o ż e z r ó w n o w a ż y ć j e d n ą s i ł ę.

Zastosujemy teraz zasadę możliwych przesunięć do zagadnienia o rodzajach równowagi. Rodzaje równowagi dzielimy na trzy grupy: trwała i nietrwała, stała i niestała i obojętna.

Jako przykład równowagi stałej może służyć ciężka kulka, znajdujaca się wewnatrz zagłębienia i stykajaca się z jego powierzchnia /rys.98 /. Najniższy punkt zagłębienia O jest miejscem stałej równowagi tej kulki. Gdy wyprowadzimy kulkę z położenia O, to otrzymany wahania się jej dookoła punktu O, przy czym ostatecznie po zaprzestaniu wahania kulka powróci ponownie do położenia O.



Rys. 98.




Rys.98.

Przykłademrównowagi niestałej może służyć ta sama kulka,umieszczona w najwyższym punkcie O /rys.99/ wklęsłej powierzchni.Punkt O jest położeniem niestałej równowagi kulki.Gdy wyprowadzimy kulkę z położenia O,to ona już ponownie do tego położenia nie wróci.

W reszcie kulka umieszczona na poziomej płaszczyźnie daje nam przykład położenia równowagi obojętnej.Każdy punkt tej płaszczyzny będzie położeniem równowagi obojętnej /rys.100/. Zauważymy,iż rodzaj równowagi zależy wogóle od kierunku odchylenia się od położenia równowagi.Tak przy jednych odchyleniach kulka usiłuje wrócić do położenia równowagi,mamy przy tym odchyleniu się równowagę stała.Przy odchyleniach w innym kierunku,kulka nie wraca do położenia równowagi, mamy przy tym odchylaniu równowagę niestałą.Często też bywa,że przy odchyleniach małych od położenia równowagi mamy jeden rodzaj równowagi,a przy większych odchyleniach inny rodzaj.Praktyczne znaczenie posiada tylko równowaga stała,zachodząca przy każdym odchyleniu się od położenia tej równowagi.




Rys.100.

Aby wyznaczyć kryterium dla określenia rodzaju równowagi wrócimy do dowodu Lagrange'a a zasady możliwych przesunięć /§2 tego rozdziału/.Mieliśmy tam układ sił zewnętrznych,zastąpiony przez siłę ciężkości ciężarka,zawieszonego na końcu liny,i rozpatrywaliśmy nieskończenie małe możliwe przesunięcia dozwolone przez połaczenia tego układu.Gdy zachodziła równowaga,ciężarek pozostawał nieruchomy podczas każdego możliwego przesunięcia układu.Przypuśćmy,iż znowu badamy poszczególne możliwe przesu-

nięcia układu,ale tym razem chociaż mało,lecz skończone.Wyobraźmy sobie ,iż w rezultacie tych badań,okazało się,że położenie ciężarka w chwili równowagi jest n a j n i ż s z y m w stosunku do wszystkich innych położeń jego podczas możliwych przesunięć. Możemy też wyobrazić sobie,iż położenie ciężarka dla położeń równowagi jest najwyższym.Trzecie możliwe przypuszczenie jest takie,iż ciężarek wcale nie zmienia swego położenia w przestrzeni podczas wszystkich możliwych przesunięć układdu,dopuszczonych przez jego połaczenia.Oznaczymy jak poprzednio przez $S_1, S_2, S_3, \ldots$ $\ldots S_n$ siły zewnętrzne,a przez $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$ odpowiednie rzuty możliwych przesunięć układu, zaczepienia sił na ... te ich działania.Widzieliśmy,iż w rezultacie tych przesunięć ciężarek opuści się na długość równa sumie algebraicznej:

$$K_1.\delta s_1 + K_2.\delta s_2 + K_3.\delta s_3 + \ldots + K_n.\delta s_n.$$

Ponieważ zaś $K_1.J = S_1$, $K_2.J = S_2$, $K_3.J = S_3, \ldots K_n.J = S_n$, to poprzednie wyrażenie napiszemy tak:

$$\frac{1}{J}/S_1.\delta s_1 + S_2.\delta s_2 + \ldots\ldots + S_n.\delta s_n/ = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n} S_i.\delta s_i$$

Sumując te długości opuszczenia się ciężarka dla nieskończenie małych przesunięć otrzymamy długość opuszczenia się ciężarka podczas skończonego możliwego przesunięcia od położenia równowagi /o/ do sąsiedniego bliskiego możliwego położenia /I/: mianowicie:

$$\frac{1}{J}\sum_j \sum_{i=1}^{n} S_i.\delta s_{ij} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n}\sum_j S_i.\delta s_{ij} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n} S_i.\sum_j \delta s_{ij}$$

$$= \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n} S_i.\int_{s_o}^{s_1} ds_i = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n} S_i/s_{1i} - s_{0i}/ .$$ W pierwszym z wymienionych wypadków,kiedy położenie ciężarka w położeniu równowagi jest n a j n i ż s z e z możliwych położeń ,powyższa suma musi być u j e m n a,ponieważ ciężarek podczas skończonego możliwego przesunięcia w rzeczywistości nie opuszcza się,lecz podnosi się do góry;mamy w tym wypadku rodzaj równowagi s t a ł e j c z y l i t r w a ł e j.W drugim wypadku,kiedy ciężarek opuszcza się ku dołowi podczas możliwego przesunięcia,kiedy ciężarek w położeniu równowagi zajmuje położenie n a j w y ż s z e z możliwych położeń,powyższa suma jest d o d a t n i ą,mamy w tym

wypadku rodzaj równowagi n i e s t a ł e j ,czyli n i e t r w a ł e j. W reszcie w trzecim wypadku, gdy ciężarek nie zmienia swego położenia w przestrzeni, powyższa suma jest równą zeru, mamy więc wypadek równowagi obojętnej.

Przeto znak przy wzorze na pracę, jaką wykonują siły zewnętrzne, przyłożone do układu materialnego, podczas każdego możliwego przesunięcia skończonego od położenia równowagi do sąsiedniego bliskiego położenia układu, wyznacza rodzaj równowagi, w jakiej układ materialny się znajduje:

Gdy:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i/s_{1i} - s_{oi}/ < 0 \text{ - równowaga stała,}$$

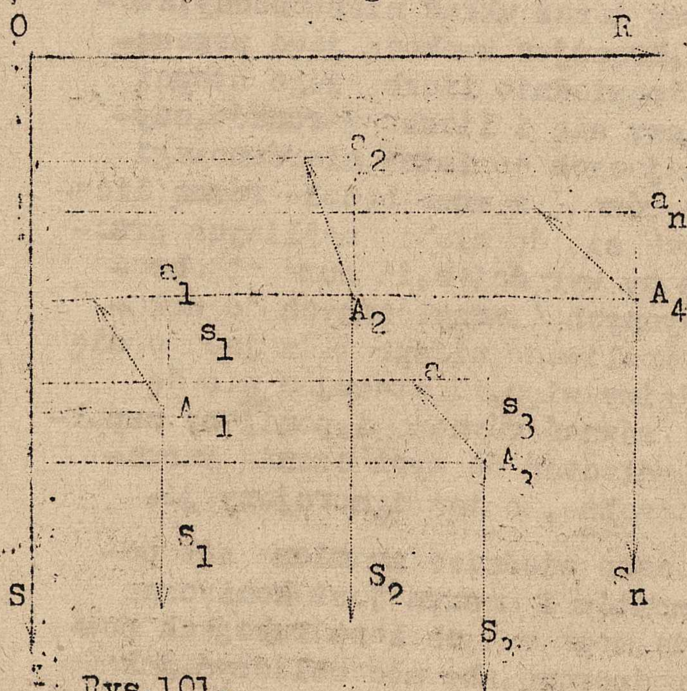
gdy:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i/s_{1i} - s_{oi}/ > 0 \text{ - równowaga niestała,}$$

gdy:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i/s_{1i} - s_{oi}/ = 0 \text{ - równowaga obojętna.}$$

Na zakończenie rozpatrzmy ważny szczególny wypadek równowagi układu, gdy siłami zewnętrznymi są tylko siły ciężkości. Układ składa się z punktów ciężkich $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ o wagach odpowiednio równych: $S_1, S_2, \ldots S_n$. Oznaczając rzędne tych punktów układu przez $s_1, s_2, \ldots s_n$, otrzymamy, według własności środka ciężkości tego układu:



Rys.101.

$$S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3 + \ldots,$$

$$\ldots + S_n s_n = S.s, \text{ przy-}$$

czym:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

a $\bar{s}$ jest rzędną środka ciężkości. Różniczkując tę równość otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i ds_i = S ds,$$

ponieważ wartości sił $S_1, \ldots S_n$ są stałe. Sumując te równości według nieskończenie małych przesunięć, otrzymamy dla skończonego przesunięcia:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \; ds = S \; ds, \text{ czyli } \sum_{i=1}^{n} S_i/s_{1i} = s_{oi}/ = S/s_1 = s_o/ =$$

$$= / s_1 - s_o/ \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Według wyznaczonego wyżej kryteriumdla określenia rodzaju równowagi, *będziemy mieć równowagę stałą, jeżeli środek ciężkości układu materialnego zajmuje położenie możliwie najniższe.*

Rzeczywiście, $\sum_{i=1}^{n} s_i$ 0, więc znak pracy zależy odznaku różnicy $s_1 - s_0$ : gdy ta różnica jest ujemna, to $s_0$ $s_1$ i w położeniu równowagi środek ciężkości układu zajmuje położenie najniższe. *Równowaga jest niestała, jeżeli środek ciężkości układu zajmuje położenie możliwie najwyższe.* Wtedy różnica $s_1 - s_0$ jest dodatnia; $s_0$ $s_1$ i środek ciężkości zajmuje w położeniu równowagi położenie najwyższe. Wreszcie, gdy $s_1 - s_0 = 0$, to *środek ciężkości nie zmienia swego położenia i równowaga jest obojętną.*

## IX. Równowaga nieswobodnej bryły materialnej i wyznaczenie sił podporowych.

Wprowadziliśmy dopiero co równania równowagi swobodnego układu materialnego. Rozpatrzymy teraz układ nieswobodny, który otrzymamy z układu swobodnego, krępując swobodę jego przesunięć, innymi słowy, zmniejszając odpowiednio liczbę jego stopni swobody. Stosownie do tego, zmniejszy się i liczba warunków, czyli równań koniecznych i wystarczających do istnieniarównowagi układu materialnego. Liczba tych równań zawsze będzie równą liczbie pozostałych niesprowadzających się do siebie możliwych przesunięć układu. Równania te otrzymamy wyrażając, iż suma algebraiczna prac sił zewnętrznych /czynnych/, przyłożonych do układu materialnego, podczas każdego możliwego niesprowadzającego się przesunięcia jest równa zeru. Widzimy więc, że stosując zasadę możliwych przesunięć do ułożenia równań równowagi, pomijamy zupełnie wszelkie siły połączeń. Siły połączeń do wyznaczenia warunków równowagi są zupełnie niepotrzebne, to też ignorujemy je.

Często jest rzeczą konieczną wiedzieć znamiona sił połączeń. Np. w technice do budowy mostów i maszyn jest konieczną znajomość tych sił połączeń, jakie mogą w tych konstrukcjach powstać. Musimy znać wszelkie siły podporowe, aby moc obliczyć, jaka musi być wytrzymałość materiału i wymiary poszczególnych części składowych urządzenia, a także warunek stateczności tego urządzenia. W maszynach siły połączeń, powstające w postaci ciśnień na wały, i inne ruchome części, powodują opory tarcia pierwszego i drugiego rzędu, których wielkość jest zależna od wartości

liczebnej siły przyciskającej.Aby więc obliczyć opory tarcia trzeba koniecznie posiadać dokładne dane o siłach połączeń.Zasada możliwych przesunięć może być ze skutkiem użytądo wyznaczenia sił połączeń.

Powiedzieliśmy wyżej,że zasada możliwych przesunięć ruguje siły połączeń,jest to rzecza pierwszorzędnej wagi,ponieważ pozwala zagadnienie więcej skomplikowane rozłożyć na dwa zagadnienia niezależne,znacznie prostsze.Mianowicie,I/ wyznaczenie warunków równówagiukładu materialnego,t.j.określenie takich sił zewnętrznych,które działając na układ materialny,znajdowały by się na układzie w stanie równowagi,i 2/ wyznaczenie sił połączeń.

Gdybyśmy rozwiazali oba te zagadnienia jednocześnie,otrzymalibyśmy wiele niewiadomych,zależnych między sobą.Wiemy przecież, iż powiększajac liczbę zwiazanych między soba niewiadomych,znacznie utrudnimy rozwiazanie zagadnienia,dlatego też rozłożenie niewiadomych,na grupy ,niezależne między soba,znakomicie ułatwia rozwiazanie.Zasada możliwych przesunięć,właśnie dokonywa podobnego podziału niewiadomych na grupy.Oprócz tego zasada możliwych przesunięć,daje najdogodniejszy sposób do rozwiązania drugiego zagadnienia,mianowicie do wyznaczenia sił połączeń.

Gdy stosujemy zasadę możliwych przesunięć do wyznaczenia równań równowagi,to mamy do czynienia z przesunięciami,dostosowanymi do wszystkich połączeń układu,t.j.z takimi przesunięciami, które nie sa skrępowane połaczeniami układu,dlatego też wszystkie siły połączeń zostały wyrugowane.

Gdy zaś chcemy wyznaczyć siły połączeń,to jest rzeczą konieczna,badać przesunięcia,które są właśnie skrępowane przez pewne połaczenia układu,np.chociażby przez jedno połączenie.Zastępujemy w pamięci to połaczenie przez pewną siłę,która będzie siłą połaczenia,lecz znamiona jej sa nam nieznane.Tę siłę doliczymy do sił zewnętrznych, czynnych.Następnie stosujemy zasadę możliwych przesunięćdo przesunięcia,które było skrępowane przez to połączenie,obecnie pousunięciu tego połaczenia,omawiane przesunięcie stało się możliwym.Otrzymujemy wtedy jedno równanie,do którego poszukiwana siła połaczenia wchodzi jako jedyna niewiadoma.Ten sposób jest bardzo dogodny,ponieważ nie odrazu pozwala wyznaczyć wszystkie niewiadome siły połaczeń,lecz stopniowo,dzieląc je na grupy zawierające niewielką ilość niewiadomych w każdej z nich.Często się zdarza,że otrzymujemy zupełne rozdzielenie niewiadomych,t.j. udaje się w taki sposóbdobrać możliwe przesunięcia,iż w każdej takiej grupie będzie tylko jedna jedyna niewiadoma siła połączenia.Wtedy w nadzwyczaj łatwy sposób określimy wszystkie niewiadome siły połaczenia.

Istnieje i inny s p o s ó b ,oparty bezpośrednio na r ó w n a n i a c h r ó w n o w a g i ,otrzymanychw §2 rozdz.VI, i na zasadzie 5-ej s t a t y k i brył niezmiennej,podanejw rozdz.I.

Z a s a d a 5-a statyki głosi,że p o ł ą c z e n i a b r y ł y m a t e r i a l n e j,k r ę p u j ą c e s w o b o d ę r u c h u t e j b r y ł y, m o ż e m y z a s t ą p i ć p e w n y m i s i ł a m i d o ł ą c z o n y m i d o s i ł z e w n ę t r z n y c h i w t e d y j u ż m o ż n a r o t p a t r y w a ć b r y ł ę, j a k o s w o b o d n ą,z n a j d u j ą c ą s i ę p o d d z i a- ł a n i e m w s z y s t k i c h p o w y ż s z y c h s i ł t.j.s i ł rzeczywiście z e w n ę t r z n y c h i s i ł p o- ł ą c z e ń.Możemy więc do naszej bryły zastosować równanie rów- nowagi swobodnej bryły.Otrzymamy wtedy sześć równań: trzy równania rzutów na osie współrzędnych,które wybieramy w sposób najdogod- niejszy dla nas i tzry równania momentów względem tychże osi współ- rzędnych.Do niektórych z tych sześciu równań wejdą niewiadome nam rzuty sił połaczeń,a inne moga zawierać tylko rzuty sił danych- zewnętrznych;

Pierwsza grupa równań posłuży do wyznaczenia niewia- domych,jeżeli liczba ich nie jest mniejsza od liczby tych nie wia- domych;

Druga grupa równań da warunki konieczne do równowagi bryły pod działaniem danych sił zewnętrznych.Widzimy więc,że n aj- w i ę k s z ą l i c z b ę n i e w i a d o m y c h k t ó r ą m o- ż e m y j e s z c z e w y z n a c z y ć j e s t s z e ś ć.

Gdy niewiadomy ch jest więcej,jak to często bywa, to okazuje się ,że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć z otrzyma- nych w powyższy sposób równań wszystkich tych niewiadomych; otrzy- mujemy czasem tylko pewne zależności ,które muszą zachodzić po- między niewiadomymi siłami połaczeń.Takie wypadki równowagi na- zywamy s t a t y c z n i e -n i e o k r e ś l o n y m i.

Zauważymy jednakże,że czasem daje się rozwiąza- nie w tych wypadkach doprowadzić do końca,gdy na mocy tego lub innego praktycznego przedstawienia,połączenia podają pewne doda kowe dane o siłach tych połączeń,zawdzięczajac czemu możemy po- większyć ilość równań,służacych do wyznaczenia tych połączeń.

Jeżeli zaś takich dodatkowych warunków nie mamy, lecz w ilości niewystarczającej do wyznaczenia wszystkich sił połączeń, to aby zupełnie rozwiązać zadanie o równowadze bryły, musimy zrzec się rozpatrywania danej bryły materialnej,jako ciała sztywnego,i wziać pod uwagę z m i a n y o d l e g ł o ś c i p o- m i ę d z y p o s z c z e g ó l n y m i p u n k t a m i c i a- ł a,powstajace pod wpływem działania na ciało sił zewnętrznych. Te odkształcenia ciała powoduja siły sprężystości,które musimy do- łaczyć do sił na ciało działajacych.Nie będziemy w obecnych wy- kładach wdawać się w te zagadnienia, gdyż one należą do t e o r i i s p r ę ż y s t o ś c i.

Porównując ze sobą oba przytoczone sposoby, widzimy:

I/, że drugi sposób, jako oparty na zasadach statyki bryły niezmiennej, stosuje się wyłącznie do b r y ł y m a t e r i a l n e j n i e z m i e n n e j, gdy sposób pierwszy, oparty na zasadzie możliwych przesunięć, możemy zastosować do d o w o l n e g o u k ł a d u m a t e r i a l n e g o i

2/, że drugi sposób daje nam odrazu układ sześciu równań, które musimy jednocześnie rozwiązywać względem niewiadomych sił połączeń, gdy zaś sposób pierwszy pozwala stopniowo wyznaczać niewiadome siły połączeń. Stąd wnioskujemy, że stosowanie zasady możliwych przesunięć jest pod wszelkimi względami dogodniejsze.

Rozpatrzmy teraz kilka wypadków równowagi nieswobodnej bryły materialnej, przy czym zastosujemy oba przytoczone sposoby.

Przypuśćmy, że bryła, znajdująca się pod działaniem sił zewnętrznych $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$, p o s i a d a j e d e n n i e r u c h o m y p u n k t O. Ten punkt O, będąc właśnie połączeniem, krępuje ruch bryły w taki sposób, iż czyni niemożliwym wszelki ruch postępowy, natomiast, bryła może obracać się dookoła dowolnej osi, przeprowadzonej przez ten nieruchomy punkt O.

Ponieważ zaś wiadomo, że r u c h o b r o t o w y d o o k o ł a o s i m o ż e b y ć z a s t ą p i o n y t r z e m a r u c h a m i o b r o t o w y m i d o o k o ł a t r z e c h w z a j e m n i e d o s i e b i e p r o s t o p a d ł y c h o s i, to przyjmując te osie za osie współrzędnych, wnioskujemy, że w tym wypadku mamy t r z y s t o p n i e s w o b o d y. Trzy ruchy obrotowe dookoła osi współrzędnych są to trzy niesprowadzające się możliwe przesunięcia, do nich sprowadzają się wszystkie możliwe przesunięcia. Dla każdego z pośród tych trzech przesunięć suma algebraiczna prac sił zewnętrznych, musi być równa zeru. Widzieliśmy już w § 3 poprzedniego rozdziału, że z tych warunków wynikają takie trzy równania równowagi:

$$M_{gx} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = \sum_{i=1}^{n} / Z_i . Y_i - Y_i . z_i / = 0$$

$$M_{gy} = \sum_{i=1}^{n} / X_i . z_i - Z_i . x_i / = 0$$

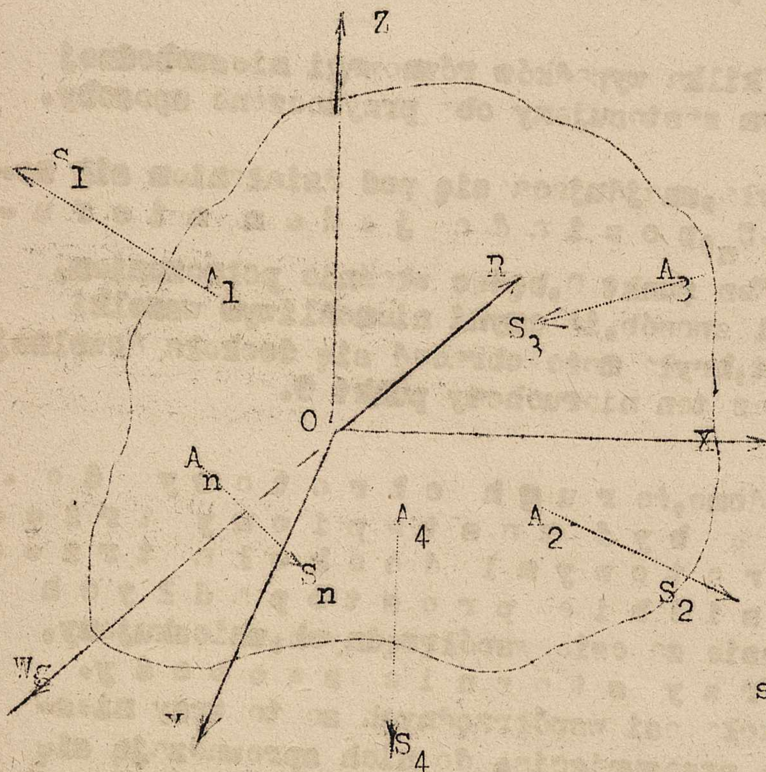
$$M_{gz} = \sum_{i=1}^{n} / Y_i . x_i - X_i . y_i / = 0$$

Są to k o n i e c z n e i w y s t a r c z a j ą c e w a r u n k i, a b y z a c h o d z i ł a r ó w n o w a g a b r y ł y, m a j ą c e j j e d e n p u n k t n i e r u c h o m y.

Wyznaczymy teraz siłę połączenia, mianowicie siłę podpo-

rowa, powstająca w połączeniu, t.j. w punkcie nieruchomym o. Oczywiście, że działanie punktu podparcia o bryłę, sprowadza się do jednej siły, przechodzącej przez ten punkt, wartość liczebna i kierunek tej siły połączenia są nam nieznane. Siła ta R będzie w zupełności określoną, jeżeli określimy jej trzy rzuty $R_x$, $R_y$, i $R_z$

na osie współrzędnych X, Y, Z /rys. 102/.




Rys. 102.

Zamieniamy połączenie trzema siłami $R_x$, $R_y$, $R_z$, które następnie doliczymy do sił zewnętrznych $S_1, \dots S_n$. Dopóki istniało połączenie, bryła nie była w stanie poruszać się ruchem postępowym, obecnie taki ruch stał się możliwym.

Wyobraźmy sobie, iż bryła otrzymała ruch postępowy w kierunku osi OX, wyrażając, że suma prac algebraiczna wszystkich sił zewnętrznych t.j. $S_1$, $S_2, S_3, \dots S_n, R_x, R_y$, i $R_z$ jest podczas tego przesunięcia równą zeru. Otrzymamy równanie:

$$x/R_x + \sum_{i=1}^{n} X_i/ = 0$$

czyli:

$$R_x + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

To równanie zawiera jedyną niewiadomą $R_x$, którą określimy:

$$R_x = - \sum_{i=1}^{n} Y_i = - W_{gx}$$

Zupełnie analogicznie otrzymamy, że:

$$R_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \text{i} \quad R_z + \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

skąd ostatecznie:

$$R = - W_g .$$

Zastosujemy teraz drugi sposób. Dołączając do sił zewnętrznych przeciwdziałanie R punktu O, t.j. rozpatrując układ sił $S_1, \ldots S_n$, R, przyjmujemy, że bryła stała się swobodną, a więc możemy zastosować do niej równanie równowagi bryły swobodnej. Otrzymamy:

$$R_x + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 , \quad R_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 , \quad R_z + \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 ;$$

$$M_{gx} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/ = 0 .$$

$$M_{gy} = \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i/ = 0$$

$$M_{gz} = \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ = 0 .$$

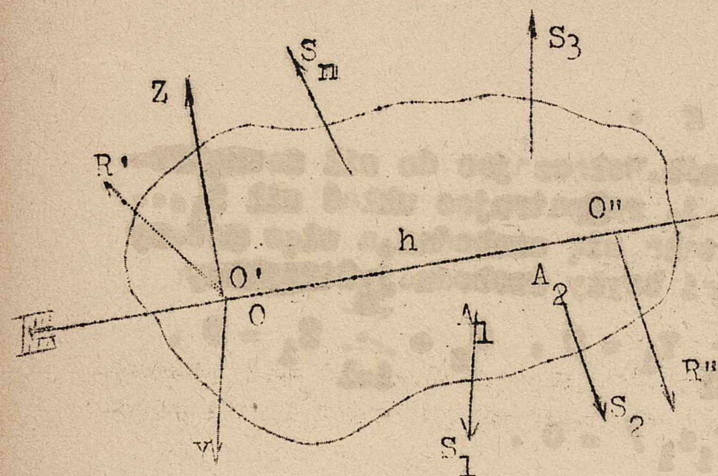
Widzimy, że R nie figuruje w ostatnich trzech równaniach, dlatego też ostatnie trzy równania stanowią konieczny i wystarczający warunek równowagi układu sił $S_1, S_2, \ldots S_n$ na bryle, posiadającej jeden punkt nieruchomy. Gdy te trzy warunki są spełnione, t.j. ostatnie trzy równania obracają się w tożsamość w postaci 0=0 to pierwsze trzy równania dadzą wartość liczebną i kierunek niewiadomego przeciwdziałania podpory R.

Ponieważ trzy warunki równowagi głoszą, że dany układ sił zewnętrznych sprowadza się do jednej wypadkowej i ponieważ rzuty tej ostatniej na osie współrzędnych są:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i , \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i ,$$

to możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Twierdzenie: G d y b r y ł a m a t e r i a l n a p o s i a d a j e d e n p u n k t n i e r u c h o m y , t o w a r u n e k k o n i e c z n y i w y s t a r c z a j ą c y d l a j e j r ó w n o w a g i p o l e g a n a t y m , ż e b y s u m y a l g e b r a i c z n e m o m e n t ó w s t a t y c z n y c h s i ł z e w n ę t r z n y c h w z g l ę d e m t r z e c h w z a j e m n i e p r o s t o p a d ł y c h o s i w s p ó ł r z ę d n y c h p r z e c h o d z ą c y c h p r z e z p u n k t n i e r u c h o m y , b y ł y r ó w n e z e r u k a ż d a z o s o b n a ; w t e d y c i ś n i e n i e b r y ł y n a p u n k t n i e r u c h o m y j e s t r ó w n e g ł ó w n e m u w e k t o r o w i s i ł z e w n ę t r z n y c h , p r z e c i w d z i a ł a n i e /siła połączenia/ z a ś p o d p o r y j e s t r ó w n e c o d o w a r t o ś c i l i c z e b n e j , l e c z p r z e c i w n i e s k i e r o w a n e , o d g ł ó w n e g o w e k t o r a .




Rys. 103.

Rozpatrzmy teraz wypadek, kiedy ruchy bryły są jeszcze więcej skrępowane połączeniami, aniżeli w poprzednim wypadku. n i e c h b r y ł a p o s i a d a d w a n i e r u c h o m e p u n k t y O' i O". /rys 103/, wtedy jedynym możliwym przesunięciem bryły jest jej obrót dookoła osi łączącej te dwa punkty. Mamy zatym jeden stopień swobody, a więc otrzymamy jedno równanie równowagi.

Przyjmując oś O'O" za oś OX, będziemy mieć:

$$Mgx = \sum_{i=1}^{n} /z_i y_i - Y_i z_i / = 0 \text{ , czyli } \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i / = 0.$$

Jest to konieczny i wystarczający warunek równowagi, wyrażający iż suma momentów statycznych sił zewnętrznych względem osi obrotu jest równa zeru.

Przystąpimy teraz do wyznaczenia sił połączeń. Mamy dwie siły połączeń R' i R" pozostające w podporach O' i O" i przez nie przechodzące. Obierzemy np. punkt O' za początek układu współrzędnych, przez h oznaczymy odległość pomiędzy punktami O' i O". Mamy zatym sześć niewiadomych: $R'_x, R'_y, R'_z, R"x, R"_y, R"_z$.

Zamienimy podpory O' O" na powyższe siły. Otrzymujemy bryłę swobodną, mogącą mieć dowolne przesunięcia postępowe i obrotowe.

Wyobraźmy sobie postępowe przesunięcie w kierunku osi OX. Stosując zasadę możliwych przesunięć, otrzymamy równanie, zawierające niewiadome $R'_x$ i $R"_x$, mianowicie

$$R'_x + R"_x + \sum_{i=1}^{N} X_i = 0$$

Przesunięcia w kierunku osi OY i OZ dadzą analogicznie:

$$R'_y + R"_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

$$R'_z + R"_z + \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

Przesunięcie obrotowe dookoła osi OY daje:

$$-h R"_z + \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i / = 0$$

możemy zatym określić $R"_z$, a więc $R'_z$.

Przesunięcie obrotowe dookoła osi OZ daje:

$$-hR"_y + \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i z_i / = 0$$

skąd znajdziemy $R"_y$, a więc $R'_y$.

możemy zatym określić $R''_z$, a więc $R'_z$.

Przesunięcie obrotowe dookoła osi OZ daje:

$$hR''_y + \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ = 0$$

skąd znajdziemy $R''_y$ a następnie $R'_y$.

Pierwsze z napisanych równań daje nam sumę $R'_x + R''_x$, zupełne wyznaczenie $R'_x, R''_x$ jest niemożliwe, mamy zatym statycznie nieokreślony wypadek.

Gdybyśmy zastosowali drugi sposób, otrzymalibyśmy sześć równań, z których tylko jedno.

$$\sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/ = 0$$

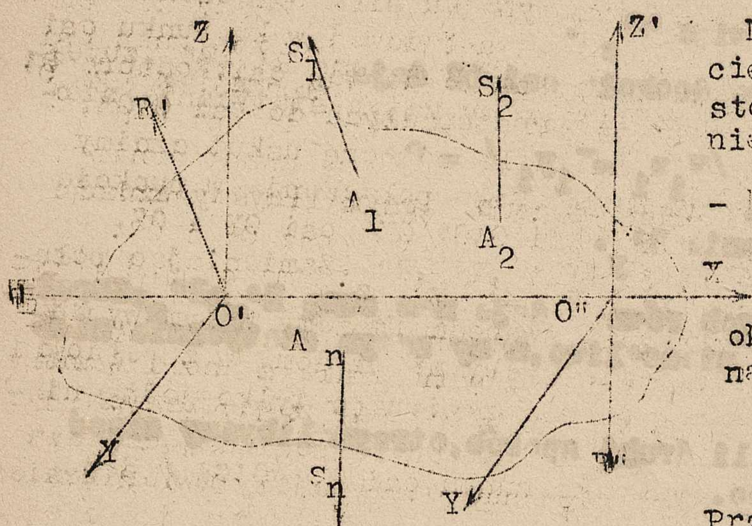
jest niezależne od niewiadomych R' i R". To równanie stanowi warunek konieczny i wystarczający na to, aby układ sił zewnętrznych $S_1 \ldots\ldots S_n$ znajdował się w równowadze na bryle, posiadającej dwa nieruchome punkty O' i O". Z tego równania otrzymujemy twierdzenie 1./ Aby bryła materialna posiadająca dwa nieruchome punkty znajdowała się w stanie równowagi, jest rzeczą konieczną i wystarczającą, żeby suma algebraiczna momentów statycznych sił zewnętrznych względem nieruchomych osi była równa zeru.

Pozostałe pięć równań zawierają sześć niewiadomych $R'_x$, $R'_y, R'_z, R''_x, R''_y, R''_z$. więc zupełne rozwiązanie jest niemożliwe.

Przypuśćmy teraz, iż punkt O" przedstawia taką podporę i że nie przeszkadza ruchowi w kierunku osi O'O", a krępuje tylko ruchy prostopadłe do tej osi. W tym wypadku siła połączenia przechodząca przez punkt zero O", nie posiada składowej w kierunku osi O'O", pozostają dwie jej składowe prostopadłe do tej osi. Podpora O' krępuje nietylko ruchy w kierunkach prostopadłych do osi O'O", lecz i w kierunku tej osi. Praktycznie taką podporę uskutecznimy za pomocą podporowego czopa /rys.104 /. Siła połączenia w punkcie O' ma więc trzy składowe, w kierunku osi O'O"/OX/, osi OY i OZ. Mamy zatem pięć niewiadomych $R'_x, R'_y, R'_z, R''_y, R''_z$. Zamieniając połączenia przez te siły, otrzymamy bryłę swobodną. Możemy w tym wypadku w taki sposób dobrać przesunięcia, ażeby niewiadome w zupełności oddzieliły się, t.j. żeby każde równanie zawierało tylko jedną niewiadomą.

Przesunięcie postępowe w kierunku osi OX /O'O" / daje:

$$R'_x + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0.$$




Następnie rozpatrzymy przesunięcie obrotowe dookoła osi OY; stosując zasadę otrzymamy równanie na $R''_z$ :

$$- hR''_z + \sum_{i=1}^{n} /x_i \cdot z_i - Z_i \cdot x_i/ = 0.$$

Przesunięcie obrotowe dookoła osi OZ daje nam $R''_y$ z równania :

$$hR''_y + \sum_{i=1}^{n} /Y_i \cdot x_i - X_i \cdot y_i/ = 0$$

Przesunięcie obrotowe dookoła osi O"Y' i O" Z', przeprowadzonych przez punkt O" równolegle do osi OY i OZ, daje równanie na $R'_z$ i $R'_y$ :

$$hR'_z + \sum_{i=1}^{n} M_i' y_i = 0 \quad i \quad -hR'_y + \sum_{i=1}^{n} M_i' \cdot z_i = 0.$$

Stosując drugi sposób, otrzymaliśmy równania :

$$R'_x + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \; ; \quad R'_y + R''_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad i$$

$$i \quad R'_z + R''_z + P''_z + \sum_{i=1}^{n} Z_i + 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} /Z_i \cdot Y_i - Y_i z_i/ \quad 0;$$

$$- hR''_z + \sum_{i=1}^{n} / x_i \cdot z_i - Z_i \cdot x_i / = 0;$$

$$hR''_y + \sum_{i=1}^{n} / Y_i \cdot x_i - X_i \cdot Y_i / = 0.$$

Z pięciu równań wyznaczymy niewiadome; widzimy jednak, iż niewiadome nie są oddzielone w tych równaniach, jak to było w równaniach otrzymanych z zasady możliwych przesunięć.

Wreszcie, gdy oba punkty O' i O" przedstawiają podpory, nieprzeszkadzające przesunięciom w kierunku osi O'O" bryła posiada dwa stopnie swobody, a więc i dwa możliwe przesunięcia obrót dookoła osi O'O" i przesunięcie postępowe w kierunku tej osi O'O". Podobny ruch często obserwujemy na nieumocowanym kole. Koniecznymi i wystarczającymi warunkami równowagi są.

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i \cdot y_i - Y_i z_i) = 0 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 0.$$

Niewiadomych mamy cztery $R'_y, R'_z, R''_y, R''_z$. Równania do ich wyznaczenia.

$$-h R''_z + \sum_{i=1}^{n} (X_i z_i - Z_i x_i) = 0$$

$$h R''_y + \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i) = 0$$

$$h R'_z + \sum_{i=1}^{n} M_i y_i = 0$$

i
$$-h R'_y + \sum_{i=1}^{n} M_i z_i = 0$$

Drugi sposób daje takie równania

$$R'_y + R''_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 ,$$

$$R'_z + R''_z + \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 ,$$

$$-h R''_z + \sum_{i=1}^{n} ( X_i z_i - Z_i x_i ) = 0$$

i
$$h R''_y + \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i ) = 0 .$$

Przypuśćmy, że bryła materialna opiera się w kilku punktach $O_1, O_2, O_3 \ldots O_k$ o płaszczyznę PP /rys 105./. Gdy płaszczyzna jest taka, że jest w stanie wywierać w punktach oparcia siły połączeń-przeciwdziałania tylko prostopadłe do swej powierzchni, to nazywamy taką płaszczyznę g ł a d k ą. Obecnie będziemy przypuszczać, że mamy do czynienia z gładką płaszczyzną. W następnym rozdziale X. omówimy własność płaszczyzny niegładkiej, czyli chropowatej,

Na bryłę działa układ sił zewnętrznych $S_1, S_2, \ldots S_n$, wyznaczymy warunki jej równowagi i przeciwdziałania płaszczyzny PP. Bryła materialna posiada w tym wypadku trzy niesprowadzające się możliwe przesunięcia, mianowicie dwa przesunięcia postępowe w kierunkach wzajemnie prostopadłych i równoległych do płaszczyzny PP, i przesunięcie obrotowe dookoła osi prostopadłej do tej płaszczyzny.

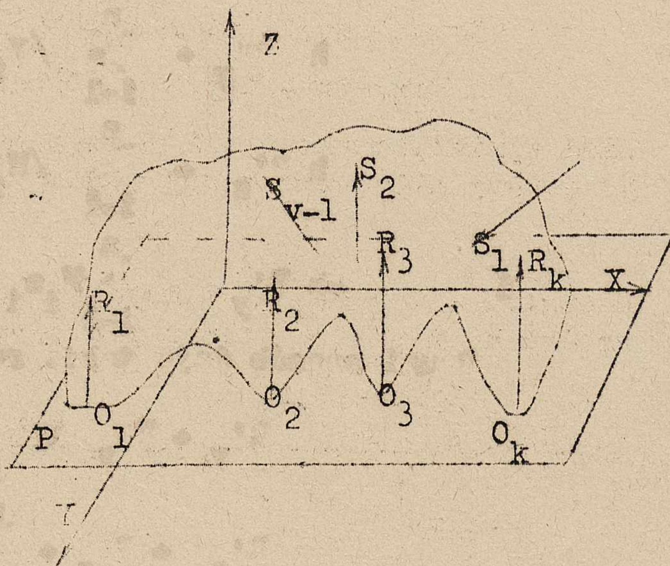
Weźmiemy osie współrzędnych, tak aby osie OX i OY leżały na płaszczyźnie PP, a oś OZ była do niej prostopadłą /rys.105 /.

Zasada możliwych przesunięć dla tych przesunięć daje:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad i \; Mg_z = \sum_{i=1}^{n} / Y_i x_i - X_i y_i / = 0 .$$

Są to w rozpatrywanym wypadku konieczne i wystarczające warunki równowagi bryły znajdującej się pod działaniem sił $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ .

Zamieniając połączenie /płaszczyznę/ siłami połączeń $R_1, R_2, \ldots \ldots R_k$, przechodzącymi przez punkty oparcia $O_1, O_2, \ldots O_k$, prostopadle do płaszczyzny, otrzymamy bryłę swobodną. Dopóki istniała płaszczyzna PP, bryła nie miała przesunięcia postępowego w kierunku osi OZ, a także przesunięć obrotowych dookoła osi OX i OY ; po usunięciu płaszczyzny te przesunięcia stają się możliwe. Stosując do nich zasadę otrzymamy równania:




Rys. 105.

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i + \sum_{i=1}^{k} R_j = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} / Z_i y_i - Y_i z_i / + \sum_{i=1}^{k} R_j y_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^{n} / X_i z_i - Z_i x_i / - \sum_{j=1}^{k} R_j x_j = 0 ,$$

przyczym $/ x_j y_j /$ są współrzędnymi punktu podparcia $O_j$ $/ j = 1 , 2 , 3, \ldots k /$.

Ponieważ mamy tylko trzy równania do wyznaczenia niewiadomych $R_1$, $R_2 \ldots\ldots R_k$, więc zadanie daje się rozwiązać do końca tylko w wypadkach kiedy mamy punktów podparcia nie więcej jak trzy. Gdy punktów podparcia jest więcej jak trzy np. 4, 5, ..., zupełne rozwiązanie staje się niemożliwym ; mamy wtedy wypadek statycznie nieokreślony.

Stosując drugi sposób otrzymamy te same równania. Trzy równania nie zawierające niewiadomych są warunkami równowagi a pozostałe służą do wyznaczenia niewiadomych przeciwdziałań. Możemy wysłowić otrzymane wnioski w postaci twierdzenia:

Twierdzenie. Gdy b r y ł a m a t e r i a l n a j e s t p o d p a r t a p r z e z g ł a d k ą p ł a s z c z y z n ę w k i l k u p u n k t a c h , t o w a r u n e k k o n i e c z n y i w y s t a r c z a j ą c y d l a j e j r ó w n o w a g i p o l e g a n a t y m , a b y s u m y a l g e b r a i c z-

ne rzutów sił zewnętrznych na dwie wzajemnie prostopadłe osie, leżące w płaszczyźnie podparcia, a także suma algebraiczna momentów statycznych tych sił względem osi, prostopadłej do tejże płaszczyzny były równe zeru każda z osobna.

Zauważymy, że na zasadzie trzech powyższych warunków, mamy

$$Mgx.Wgx + Mgy.Wgy + Mgz.Wgz + = 0 ,$$

skąd wynika, że układ sił zewnętrznych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sprowadza się do jednej siły wypadkowej równej co do wartości liczebnej:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = Wgz,$$

równoległej do osi OZ i mającej punkt zaczepienia w O' o współrzędnych $/x_o y_o z_o/$ /patrz § 4 .rozdz.VI./, przy czym:

$$x_o = \frac{-\sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i/}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}, \quad y_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/}{\sum_{i=1}^{n} Z_i} \quad \text{i } z_o = 0$$

Przystąpimy teraz do rozpatrzenia tych wypadków, kiedy rozwiązanie, t.j. wyznaczenie przeciwdziałań punktów oparcia na gładkiej płaszczyźnie, może być doprowadzone do końca, t.zn. kiedy punktów podparcia jest nie więcej jak trzy.

Wypadek jednego punktu podparcia.
/rys.106. /.

Jeżeli przyjmiemy ten punkt za początek współrzędnych O, to wyżej przytoczone równania ogólnego wypadku przyjmą taką postać:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 , \quad Mgz = \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i + R = 0 , \quad Mgx = \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/ = 0 \quad \text{i}$$

$$Mgy = \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i/ = 0 .$$

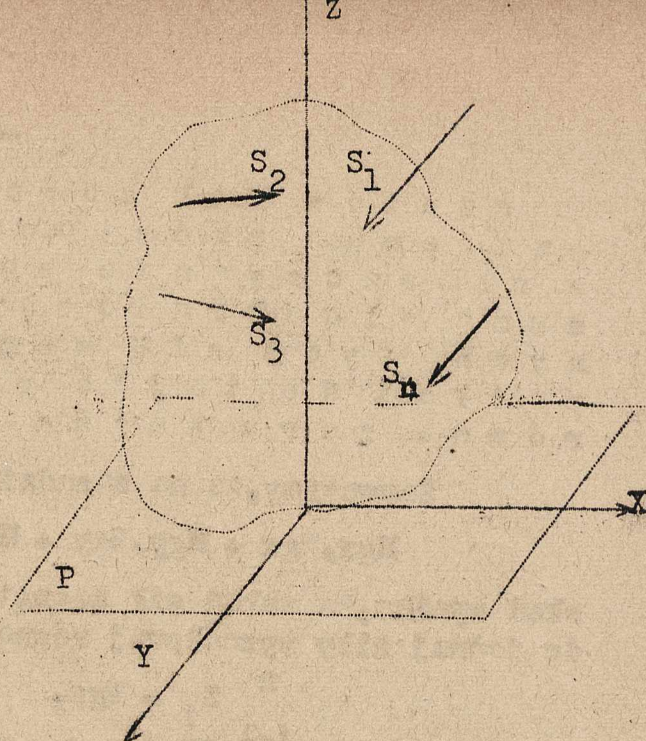
Pośród tych równań mamy pięć takich, w które nie wchodzą niewiadome, t.j. mamy pięć warunków niezbędnych i dostatecznych, aby dany układ sił znajdował się na bryle, posiadającej jeden punkt podparcia, w równowadze, zamiast trzech wypadków warunku ogólnego. Z tych warunków wynika, że dany układ sił sprowadza się do jednej wypadkowej siły przechodzącej przez punkt podparcia C i bę-

dącej prostopadłą do płaszczyzny podparcia. Przeciwdziałanie podpory O wyznaczymy z równania:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i + R = 0 \text{ , skąd}$$

$$R = - \sum_{i=1}^{n} Z_i .$$

Ponieważ prawa część tego równania przedstawia wartość liczebną wypadkowej siły układu, więc przeciwdziałanie płaszczyzny podparcia jest równe co do wartości liczebnej tej wypadkowej lecz przeciwne co do kierunku.



Rys.106.

W y p a d e k d w ó c h p u n k t ó w p o d p a r c i a . /rys.107. /.

Przyjmiemy jeden z punktów podparcia za początek współrzędnych i skierujemy oś współrzędnych OX wzdłuż prostej, łączącej te dwa punkty, przyczym oznaczymy przez h odległość pomiędzy tymi punktami. Ogólne równania wtedy dadzą:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \text{ , } \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \text{ , } Mgz = \sum_{i=1}^{n} /Y_i x_i - X_i y_i/ = 0$$

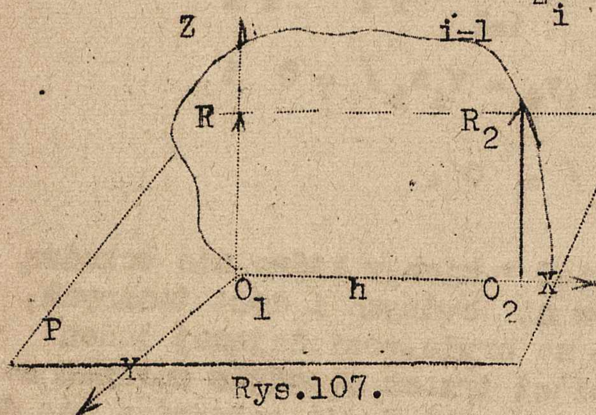
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i + R_1 + R_2 = 0 \text{ , } Mgx = \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/ = 0 \text{ i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} / X_i z_i - Z_i x_i / - h R_2 = 0 \text{ ,}$$

przy tym jest

$$x_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i/}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

$$y_o = z_o = 0 \text{ ,}$$



Rys.107.

Widzimy więc, że mamy cztery konieczne i wystarczające warunki równowagi, te warunki mówią, że równowaga zachodzi tylko wtedy, gdy dane siły sprowadzają się do jednej wypadkowej siły prostopadłej do płaszczyzny podparcia i przyłożonej do pewnego

punktu prostej $O_1O_2$, łączącej punkty podparcia / $y_c = z_c = 0$ /.

Łatwo udowodnić, iż gdy oba punkty podparcia $O_1$ i $O_2$ znajdują się po jednej stronie od płaszczyzny podparcia PP, jak to jest na rysunku 107. , to punkt zaczepienia siły wypadkowej, równej $\sum_{i=1}^{n} Z_i$, znajduje się pomiędzy punktami podporowymi.

Rzeczywiście równania:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i + R_1 + R_2 = 0 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} / X_i z_i - Z_i x_i / - h R_2 = 0$$

dają

$$-\sum_{i=1}^{n} Z_i = R_1 + R_2 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} / X_i z_i - Z_i x_i / = h R_2 .$$

a więc

$$x_0 = \frac{h R_2}{R_1 + R_2} .$$

Ponieważ $R_1$ i $R_2$ posiadają jednakowe znaki, więc

$$0 < \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \quad \text{a dlatego } 0 < x_0 < h \text{ , c.b.d.o.}$$

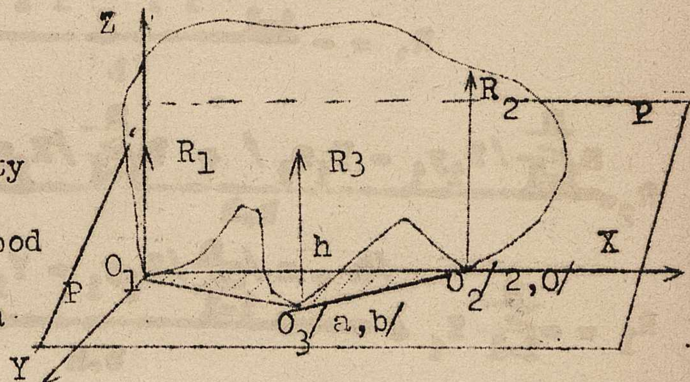
Wartość liczebną przeciwdziałań $R_1$ i $R_2$ z łatwością wyznaczymy mianowicie:

$$R_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} / X_i z_i - Z_i x_i /}{h} \qquad R_1 = - \sum_{i=1}^{n} Z_i - R_2 \text{ , albo tak}$$

$$R_1 = - \frac{/ h - x_0 / \sum_{i=1}^{n} Z_i}{h} \quad i \quad R_2 = - \frac{x_0 \sum_{i=1}^{n} Z_i}{h}$$

Z tych wzorów widzimy, że ciśnienia bryły na płaszczyznę podparcia w punktach $O_1$ i $O_2$ są to składowe siły powstającej od rozkładania wypadkowej siły danego układu na dwie równoległe siły, przyłożone do punktów podparcia.

## W y p a d e k t r z e c h p u n k t ó w p o d p a r c i a rys.108.




Weźmiemy osie współrzędnych w taki sposób, aby 1/ początek O wypadł w punkcie O'
2/ oś OX przechodziła przez dwa punkty podpory np. $O_1$ i $O_2$
3/ płaszczyzna XOY była płaszczyzną podparcia PP
4/ odcięta trzeciego punktu podparcia $O_3$ była dodatnia.

Oznaczymy przez /h O/ i /a,b/ odpowiednio współrzędne punktów $O_2$ I $O_3$, wtedy ogólne równania możemy napisać w ten sposób:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 , \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 , \sum_{i=1}^{n} Z_i + R_1 + R_2 + R_3 = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} / Z_i \cdot y_i - Y_i \cdot z_i / + bR_3 = 0, \sum_{i=1}^{n} / X_i \cdot z_i - Z_i \cdot x_i / - hR_2 - aR_3 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} / Y_i \cdot x_i - X_i \cdot y_i / = 0$$

Tu jak i w ogólnym wypadku równania pierwszego, drugie i szóste dają warunki konieczne i wystarczające istnienia równowagi, pozostałe zaś trzy - służą do wyznaczenia sił podporowych $R_1$, $R_2$, i $R_3$. Z warunków równowagi wynika, jak w ogólnym wypadku że dany układ sił sprowadza się do jednej siły wypadkowej, prostopadłej do płaszczyzny podparcia. Współrzędne jej punktu zaczepienia są:

$$x_c = - \frac{\sum_{i=1}^{n} /X_i \cdot z_i - Z_i \cdot x_i/}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} /Z_i \cdot y_i - Y_i \cdot z_i/}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}, \quad z_c = 0$$

albo na mocy równań 3-go, 4-go i 5-go :

$$x_c = \frac{hR_2 + aR_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad y_c = \frac{bR_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad i \quad z_c = 0$$

Łatwo udowodnić, że jeżeli $R_1$, $R_2$ i $R_3$ posiadają jednakowe znaki, t.j. jest wszystkie trzy punkty podparcia $O_1$, $O_2$ i $O_3$ znajdują się po jednej stronie od płaszczyzny podparcia PP, to punkt zaczepienia siły wypadkowej danego układu znajduje się wewnątrz trójkąta $O_1O_2O_3$, którego wierzchołkami są punkty podparcia.

Siły przeciwdziałań $R_1$, $R_2$, $R_3$, wyznaczymy z równań 3-go, 4-go i 5-go., wtedy:

$$R_3 = - \frac{\sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i /}{b} ;$$

$$R_2 = \frac{a \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i / + b \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i /}{b.h}$$

$$R_1 = - \sum_{i=1}^{n} Z_i + \frac{/h - a/ \sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i / - b \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i /}{b.h}$$

albo tak:

$$R_1 = \frac{y_o/h - a/ + b/x_c - h/\sum_{i=1}^{n} Z_i}{b.h}$$

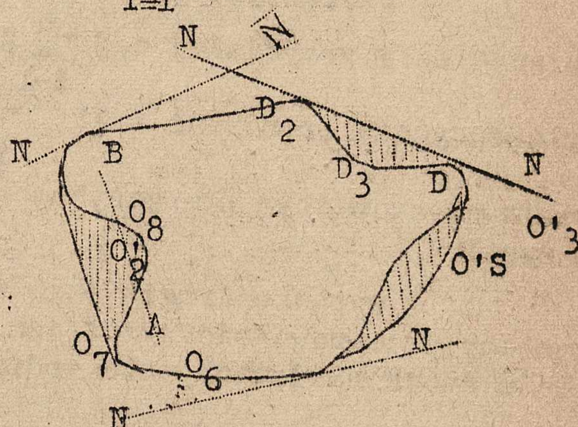
$$R_2 = \frac{a.y_c - b.x_c/\sum_{i=1}^{n} Z_i}{b.h}$$

$$R_3 = -\frac{y_c \sum_{i=1}^{n} Z_i}{b}$$

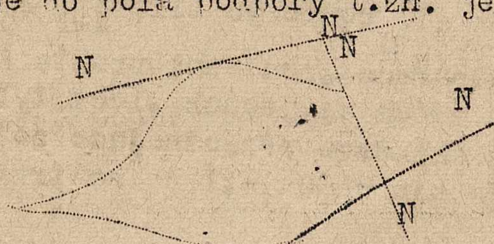
Widzieliśmy,że w wypadku jednego punktu podparcia,gdy są spełnione warunki równowagi,wypadkowa sił zewnętrznych $S_1, S_2 \ldots S_n$,przecina płaszczyznę podparcia właśnie w punkcie podporu, w wypadku dwóch punktów podparcia wypadkowa ta przecina płaszczyznę podparcia w pewnym punkcie znajdujacym się na prostej pomiędzy punktami podparcia,przez które ta prosta pruechodzi,w wypadku trzech punktów podparcią wypadkowa ta przecina płaszczyznę podparcia w punkcie,znajdujacym się wewnatrz trójkata O wierzchołkach w punktach podparcia.Od położenia tego punktu przebicia $O'/x_c, y_c, z_c/$ zależy,czy bryła znajdująca się pod działaniem siły $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ pionowo do płaszczyzny podparcia jest w równowadze,czy też nie.

Rozpatrzmy ogólny wapadek,kiedy bryła styka się z pałaszczyzną podparcia,tworzac pole zetknięcia $O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8$ /rys 109/ przyczym O' jest punkt przecięcia się siły $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ z płaszczyzną podparcia.

Na podstawie pola $O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8$ utworzymy inne pole w następujacy sposób:niech prosta linia NN toczy się dookoła pola podpory w taki sposób,że zawsze jest do niego styczną i zarazem nigdy go swym przedłużeniem nie przecina; ta prosta utworzy pewne pole $O_1'O_2'O_3'O_4'O_5'O_6'O_7'O_8'$ /rys.109./ Jeżeli pole podpory nie posiada wklęsłości lub wgłębień katowych /rys.110./,to pole utworzone w powyższy sposób przez prostą NN przystaje do pola podpory t.zn. jest z nim identyczne.Jeżeli zaś pole podpory posiada wspomniane wklęsłości i wgłębienia /rys 109./ to pole utworzone przez prostą NN wystaje w miejscach owych wklęsłości poza obwód pola podpory.Na rys 109 są te pola oznaczone kreskami /. To pole wyznaczone za pomocą pros-



Rys.109.



Rys. 110.

tej NN ,nazywamy polem stateczności,w przeciwieństwie do pola podpory.Jest rzeczą oczywistą,iż w wypadku jednego punktu podparcia bryły,ten punkt właśnie będzie polem stateczności,w wypadku dwóch i trzech punktów podparcia polem stateczności będą odpowiednio odcinek prostej pomiędzy punktami podparcia i trójkąt utworzony przez połączenie trzech punktów podparcia zapomocą prostych NN.

Udowodnimy,że gdy punkt O' $/x_o y_o z_o/$ leży wewnątrz pola stateczności mamy równowagę bryły materialnej spoczywającej na gładkiej płaszczyźnie podparcia .Gdy punkt O' leża na obwodzie pola stateczności,mamy granicę równowagi bryły materialnej ,gdy wreszcie punkt O' znajduje się poza obwodem pola stateczności bryła materialna nie może być w równowadze.

Przypuśćmy,że punkt O' przecięcia się prostej działania siły przyciskającej,prostopadłej do płaszczyzny podparcia,z tą płaszczyzną znajduje się wewnątrz pola stateczności , wtedy mogą zajść dwie możliwości:

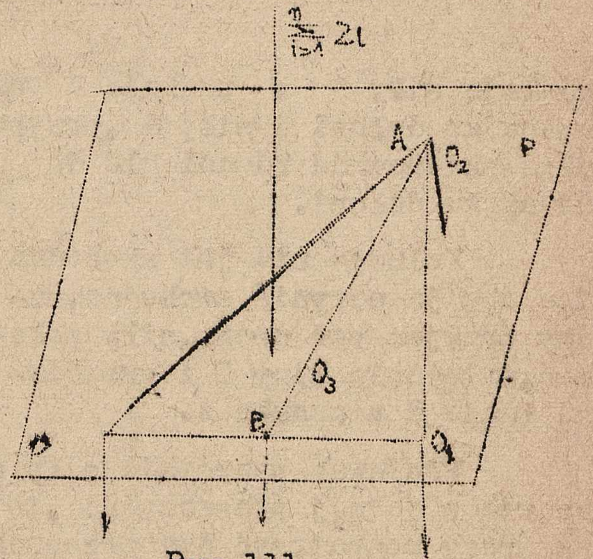
1/ punkt O' leży wewnątrz pola podpory i
2/ punkt O' leży zewnątrz pola podpory.

W pierwszym wypadku przyjmując punkt $O'_1$ za punkt zaczepienia siły przyciskającej $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ otrzymujemy równowagę bryły na płaszczyźnie ,ponieważ siła $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ równoważy się przeciwdziałaniem prostopadłym płaszczyzny podparcia,powstającym w punkcie $O'_1$ /rys.109 /

W wypadku drugim mamy np. punkt $O'_2$ /rys 109 /.Ponieważ możemy przeprowadzić przez ten punkt taką prostą AB,żeby przecięła w dwóch miejscach pole podparcia,to możemy rozłożyć siłę $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ na dwie siły równoległe i jednakowo skierowane przecinające pole podparcia bryły w pewnych punktach A i B .A zytym otrzymane dwa ciśnienia zrównoważą się przeciwdziałaniem płaszczyzny podparcia powstałym w punktach A i B . Otrzymujemy więc i w tym wypadku równowagę bryły.Zauważymy,że czasem nieda się rozłożyć siłę $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ na dwie składowe,przecinające pole podparcia ,ponieważ prosta AB nie przecina jednocześnie tego pola w dwóch miejscach ,lecz tylko w jednym ;wtedy ,aby rozłożyć siłę na składowe przecinające pole podpory ,Będziemy zmuszeni rozłożyć ją nie na dwie,lecz na trzy

składowe. Taki wypadek zachodzi n.p. dla trzech punktów podparcia bryły $O_1$, $O_2$ i $O_3$ ./rys.111./.

Gdy punkt $O'_3$ leży poza obwodem pola stateczności /rys.109/ to ponieważ przeciwdziałania płaszczyzny podparcia są skierowane od płaszczyzny w stronę bryły, a siła przyciskająca $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ ma przeciwny kierunek, to w rezultacie na bryłę działa para sił, dążąca do obrotu bryły dookoła pewnej osi w kierunku działania siły. Suma algebraiczna momentów statycznych wszystkich sił działających na bryłę nie może więc być równa zeru względem tej osi, którą możemy obrać za oś współrzędnych. Warunek równowagi bryły nie jest spełniony. i bryła musi wywrócić się.



Rys.111.

Oczywiście, gdy punkt O' leży na obwodzie pola stateczności, to bryła znajduje się na granicy równowagi.

Jest rzeczą pewną, że im dalej punkt O', znajdujący się wewnątrz pola stateczności jest położony od obwodu tego pola tym większą jest stateczność bryły i tym trudniej jest ją wywrócić. Oznaczymy przez d najkrótszą odległość pomiędzy punktem O', położonym wewnątrz pola stateczności i obwodem tego pola. Wtedy iloczyn:

$$d \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

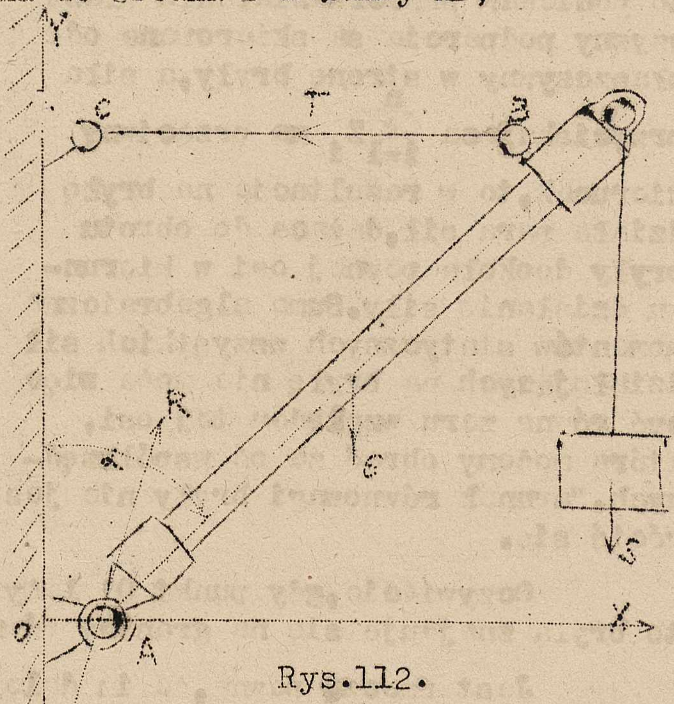
nazywamy **m o m e n t e m s t a t y c z n o ś c i b r y ł y**. Im moment statyczności jest większy tym równowaga jest więcej stała; granicznej równowadze odpowiada moment statyczności równy zeru.

Przy tych ogólnych rozważaniach przytoczymy kilka wypadków rozwiązania zagadnień o równowadze nieswobodnej bryły materialnej.

P i e r w s z y  p r z y k ł a d . Dźwignica składa się z kolumny AB /rys.112./, umocowanej p r z e g u b o w o w końcu A i podnoszącej na końcu B ciężar S równy 200 kg. Kolumnę utrzymuje lina pozioma BC przyczym kierunek kolumny tworzy kąt $\alpha = 45^\circ$ ze ścianą pionową, ciężar zaś jej przyłożony w środku D, wynosi G = 100 Kg. Obliczyć naprężenie $\sigma$ liny, oraz siłę podporową R, podpory A.

Bryła materialna jest w tym wypadku kolumna AB, na którą

działają siły S w punkcie B równolegle do ściany pionowej ,skie rowana ku dołowi i siły G ,przyłożona do środka D kolumny AB, także skierowana równolegle do ściany ku dołowi.



Rys.112.

Kolumna nie jst swobodna więc aby ją uczynić swobodną,musimy przyjąć pod uwagę,siły połączeń,natężenie liny T i przeciwdziałanie R przeguba A.

Ponieważ wszystkie siły są zawarte w jednej płaszczyźnie,to wystarczy rozpatrzyć dwa przesunięcia postępowe i jedno obrotowe; w tym celu weźmiemy osie współrzędnych w tej samej płaszczyźnie w sposób wskazany na rys.112.Długość kolumny oznaczymy przez 2 L , wtedy otrzymamy następujące trzy równania:

$$R_x - T = 0$$

$$R_y - S - G = 0$$

$$\text{i} \quad G.L.\sin\alpha + 2\,S.L.\sin\alpha - 2\,T.L.\cos\alpha = 0$$

skąd z łatwością otrzymujemy niewiadome siły połączeń:

$$R_x = \frac{/G + 2.S/\ tg\alpha}{2}\ ,\ R_y = G + S \quad \text{i} \quad T = \frac{/G + 2\,S/tg\alpha}{2}.$$

Dla wartości na G, S i $\alpha$ podanych w zadaniu otrzymamy z powyższych wzorów:

$$R_x = 250 \text{ kg.},\quad R_y = 300 \text{ kg.} \quad \text{i} \quad T = 250 \text{ kg.},$$

skąd wyznaczymy wartość liczebną przeciwdziałania p r z e g u b u:

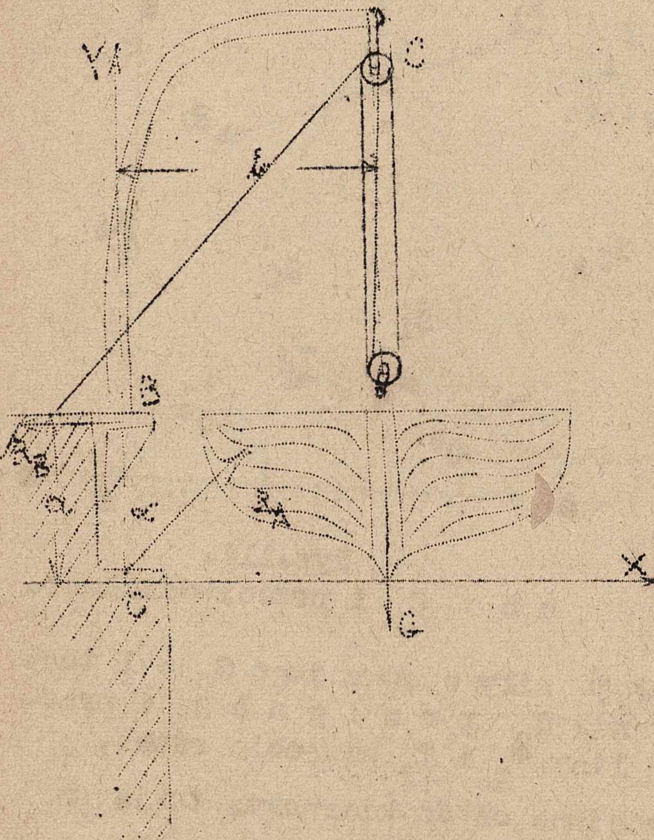
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 390,5 \text{ kg.}$$

Kierunek przeciwdziałania R okr limy za pomocą kąta $\beta$ , utworzonego pomiędzy R i osią OY:

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{300}{390,}\ ,\ \text{skąd}\ \beta = 39^o 48'.$$

Ciśnienie kolumny AB na przegub A ,oczywiście jest równe, co do liczebnej wartości,lecz przeciwne co do kierunku,sile przeciwdziałania R = 390,5 kg.

D r u g i   p r z y k ł a d ..



Rys 113.

Szalupa okrętowa /rys.113./ważąca G = 300 kg.,wisi na końcu pręta krzywego ABC w odległości b = 8 stóp od prostej pionowej AB,łączącej podpory A i B .Odległość pomiędzy tymi podporami wynosi AB = a = 6 stóp.Jaka jest wartość liczebna i kierunek sił podporowych $R_A$ i $R_B$ .

W tym zagadnieniu bryłą materialną,której równowagę badamy jest krzywy pręt ABC wraz z szalupą .Układ ten nie jst swobodny,albowiem punkt jego A i B są umocowane.Ponieważ w punkcie B pręt swobodnie przechodzi przez czop to ciśnienie jego na czop i przeciwdziałanie posiadają kierunek prostopadły do AB.Jedyną siłą działającą na pręt jest siła ciężkości G skierowana pionowo ku dołowi.Pręt posiada oś ,dookoła której może obracać soę, ponieważ siła G jest równoległą do tej osi AB,to moment siły względem tej osi jest równy zeru, warunek równowagi jest zatym spełniony .Równania równowagi są :

$$R_{AX} + R_B = 0, \quad R_{AY} - G = 0 \text{ i } 8G - 6R_B = 0,$$

skąd otrzymujemy:

$$R_B = \frac{4}{3}G, \quad R_{AX} = \frac{4}{3}G, \text{ i } R_{AY} = G,$$

czyli $R_B = -400$ kg ., $R_{AX} = 400$ kg., $R_{AY} = 300$ kg.

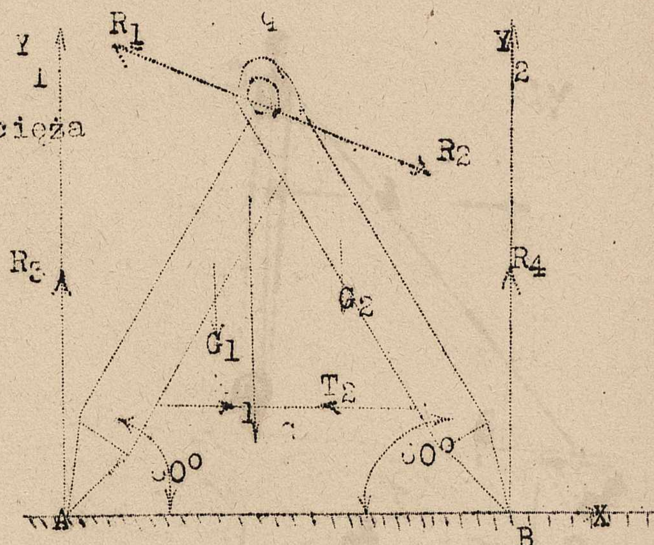
skąd $R_A = 500$ kg. ,a $R_B = -400$ kg.,

przyczym kat $\alpha$ pomiędzy $R_A$ i osią OY jest :

$$\cos\alpha = \frac{R_{AY}}{R_A} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \text{więc } \alpha = 62^0 8'$$

<u>Trzeci przykład</u>. Dwa pręty AC i BC jednakowej długości /12 stóp każdy / jednakowej wagi /1 tonna / są połączone ze sobą p r z e g u b o w o . w punkcie C i opierają się końcami AB na gładką podłogę,tworząc z nią katy równe $60^0$.Oprócz tego pręty te

są połączone ze sobą zapomocą liny MN przyczym odległość punkt MN od podstaw A i B są równe 2 stopy każda. Do pręta AC w punkcie D odległym od p r z e g u b a C o jedną stopę, przymocowany jest ciężar G równy 4 tonny. Określić przeciwdziałania podłogi, p r z e g u b a i natężenie liny /środek ciężkości każdego pręta znajduje się w jego środku geometrycznym rys.114./




Rys.114.

Układ nasz składa się z dwóch brył.

1/ pręta AC, na który działają siły: ciężar jego $G_1 = 1$ tonna ciężar $G = 4$ tonny, natężenie $T_1$ liny MN, przeciwdziałanie $R_1$ p r z e g u b a C i przeciwdziałanie podłogi $R_3$ ,

2/ pręta BC, na który działają siły: ciężar jego $G_2 = 1$ tonna, natężenie liny $T_2$, przeciwdziałanie $R_2$ p r z e g u b a i przeciwdziałanie $R_4$ podłogi. Natężenia liny $T_1$ i $T_2$ są sobie równe, co do liczebnej wartości, lecz przeciwne co do kierunku, takie są i przeciwdziałania p r z e g u b a $R_1$ i $R_2$ .

Rozpatrzymy pręt AC ; weźmiemy za osie współrzędnych proste AX i $AY_1$ ; dla pręta BC, jako osie współrzędnych, weźmiemy BX i $BY_2$. Równania równowagi dla pręta Ac są:

$$R_{1X} + T_1 = 0 \ , \quad R_{1Y} - G_1 - G + R_3 = 0 \qquad i$$

$$11G.\cos 60^o + 6G_1 \cos 60^o + 2T_1 \sin 60^o - /12R_{1Y}\cos 60^o - 12R_{1Y}\sin 60^o/ =$$
$= 0$ . Równania równowagi dla pręta BC są:

$$-R_{1X} - T_1 = 0 \ , \ -R_{1Y} - G_2 + R_4 = 0 \qquad i$$

$$-6G_2\cos 60^o - 2T_1 \sin 60^o - /12 R_{1Y}\cos 60^o + 12 R_{1X} \sin 60^o /= 0,$$

ponieważ $R_{2X} = -R_{1X}$ , $R_{2Y} = -R_{1Y}$ i $T_2 = -T_1$ .

Pierwsze równania w tych układach są identyczne, więc odrzucając jedno z nich, otrzymamy układ równań pięciu o pięciu niewiadomych $R_{1X}$ , $R_{1Y}$, $T_1$ , $R_3$ , i $R_4$ . Ten układ po wstawieniu zamiast $G_1$ , $G_2$ i G danych wartości i mieniając sin $60^o$ i cos $60^o$ ich wartościami przepisze się tak:

$$R_{1X} + T_1 = 0 \ , \quad R_{1Y} + R_3 = 5$$

$$-6R_{1X}\sqrt{3} + 6R_{1Y} - T_1\sqrt{3} = 25,\quad R_{1Y} - R_3 = -1,\quad 6R_{1X}\sqrt{3} + 6R_{1Y} + T_1\ 3 = -3.$$

S kąd po rozwiązaniu otrzymujemy :

$$R_{1X} = \frac{14}{6}\sqrt{3},\quad R_{1Y} = \frac{11}{16},\quad T_1 = \frac{14}{15}\sqrt{3},\quad R_3 = \frac{19}{6},\quad R_4 = \frac{17}{6},$$

czyli w przybliżeniu:

$R_{1X} = -1,62$ t., $R_{1Y} = 1,83$ t., $T_1 = -1,62$ t., $R_3 = 3,17$ t., $R_4 = 2,83$t.

Znając $R_{1X}$ i $R_{1Y}$, z łatwością wyznaczymy $R_1 = -R_2 = 2,44$ t.

Zauważymy, że gdybyśmy musieli wyznaczyć tylko przeciwdziała nie podłogi $R_3$ i $R_4$, nie zaś przeciwdziałanie p r z e g u b a i natężenie liny, to moglibyśmy rozpatrywać oba pręty AC i BC jako jedną bryłę materialną. Wtedy mielibyśmy równania:

$$R_3 + R_4 - G_1 - G_2 - G = 0$$

i $- R_3 12\cos60^0 + R_4 12\cos60^0 + 6\cos60^0 + 4\cos60^0 - 6\cos60^0 = 0,$

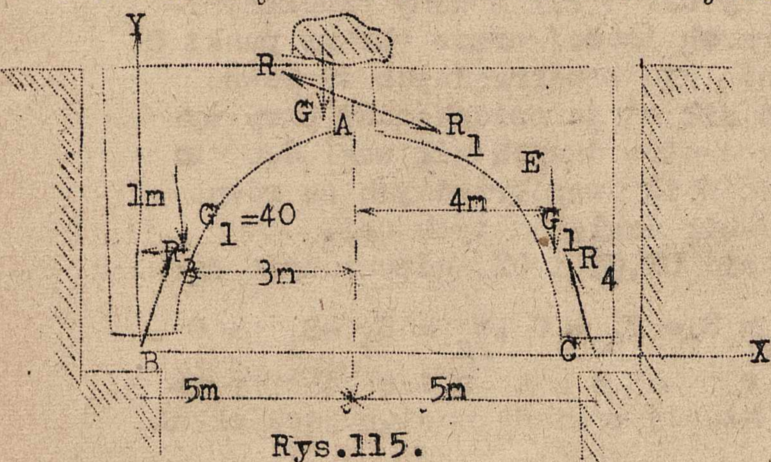
w zględem bieguna O. Trzecie równanie rzutów względem osi OX obraca się w tożsamość 0 = 0. Ostatnie dwa równania przepiszemy tak:

$$R_3 + R_4 = 6 \quad i \quad - 6R_3 + 6R_4 + 2 = 0$$

skąd $\qquad R_3 = \frac{19}{6},\quad R_4 = \frac{17}{6}$

t.j. te same wartości, które już otrzymaliśmy wyżej.

C z w a r t y   p r z y k ł a d . Most/Rys.115/ składa się z dwóch części, połączonych między sobą p r z e g u b o w o w punkcie A i przymocowanych do brzegów przyczółków przegubami B i C. W aga każdej połowy mostu jest 40 tonn, przy czym położenie środków ich ciężkości są wzkazane na rys.115. Na moście znajduje się ciężar G= 20 tonn, położenie jego jest wzkazane na rysunku. Określić ciśnienie w przegubie A i przeciwdziałania BC.



Rys.115.

Osie współrzędnych obieramy, jako jak wskazano na rys 115. oznaczymy oddziaływania prawej części mostu na lewą przez $R_1$, a lewej na prawą przez $R_2$. Przeciwdziałania w B i C odpowiednio przez $R_3$ i $R_4$. Mamy, że $R_{2X} = - R_{1X}$ i $R_{2Y} = -R_{1Y}$.

Równania równowagi lewej części mostu będą:

$$R_{1X}+R_{3X}=0$$

$$R_{1Y}+R_{3Y}-40-20=0\ ,\ 1.40+4.20+R_{1X}.4-R_{1Y}.5=0$$

Równanie prawej części są:

$$R_{2X}+R_{4X}=0\ ,\ R_{2Y}+R_{4Y}-40=0\ ,\ 9.40+R_{1X}.4-R_{2Y}.5-R_{4Y}.10=0$$

Przekształcając te dwa układy, otrzymujemy układ sześciu równań z sześciu niewiadomymi $R_{1X}, R_{1Y}, R_{3X}, R_{3Y}, R_{4X}, R_{4Y}$:

$$R_{1X}+R_{3X}=0\ ,\ R_{1X}-R_{4X}=0\ ,\ R_{1Y}+R_{3Y}=60\ ,R_{1Y}-R_{4Y}=-40$$

$$4R_{1X}-5R_{1Y}=-120,\ 4R_{1X}-5R_{1Y}+10R_{4Y}=360;$$

skąd otrzymujemy:

$R_{1X}=20$ tonn, $R_{3X}=20$ tonn, $R_{4X}=-20$ tonn, $R_{1Y}=8$ tonn, $R_{3Y}=52$ tonn

$R_{4Y}=48$ tonn.

Więc $R_1=-R_2\cong 21$ tonn, $R_3\cong 56$ tonn i $R_4=52$ tonn. Kierunki przeciwdziałań także z łatwością określimy wg ich rzutów na osie współrzędnych OX i OY.

P i ą t y p r z y k ł a d . Do w i e r z c h o ł k ó w s z e ś c i a n u o k r a w ę d z i r ó w n e j 5 cm j e s t p r z y ł o ż o n y u k ł a d s z e ś c i u s i ł r o z m i e s z c z o n y c h w s p o s ó b w s k a z a n y n a r ys 116. W i e l k o ś c i t y c h s i ł s ą r ó w n e 2 kg. s p r o w a d z i ć t e n u k ł a d d o n a j p r o s t s z e j p o s t a c i .

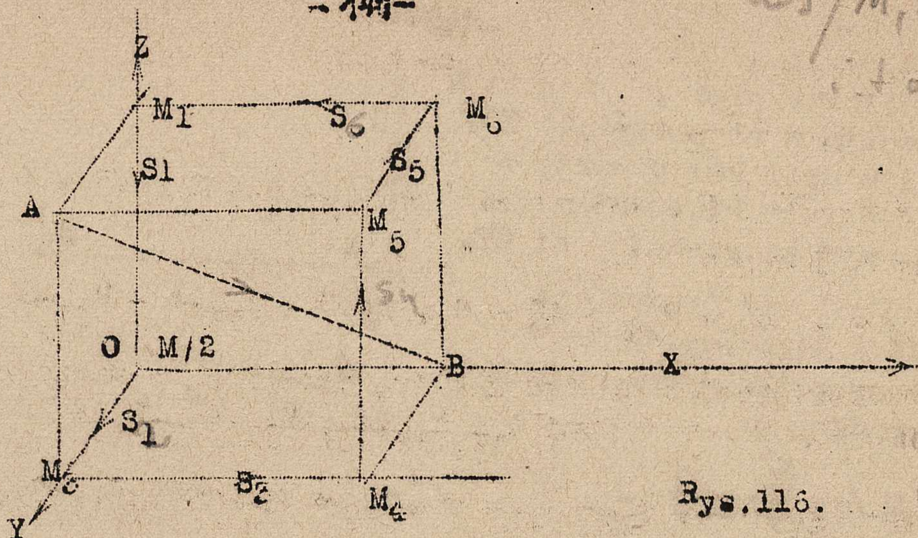
Obierzemy osie współrzędnych w sposób wskazany na rys.116. Na zasadzie §1 rozdz.6, wiemy, że dany układ sił możemy przekształcić na układ złożony z jednej siły przechodzącej przez obrany punkt O i jednej pary sił. Rzuty tej siły na osie współrzędnych są równe algebraicznym sumom rzutów danych sił na te osie. Moment pary wypadkowej jest geometryczną sumą momentów danych sił względem obranego punktu O zatym jego rzuty na osie współrzędnych są równe algebraicznym sumom momentów tych sił względem tych osi.

Rzuty siły wypadkowej na osie OX, OY i OZ odpowiednio są:

$$W_x=S_3-S_6=2-2=0\quad W_y=S_2-S_5=0\ ,W_z=S_4-S_1=0\ .$$

Więc $W=0$ i nasz u k ł a d s p r o w a d z a s i ę d o p a r y w y p a d k o w e j moment której posiada następujące składowe w kierunkach OX, OY i OZ.

cos /M,X/ = Mx/M




Rys.116.

$M_x = S_4.5 + S_5.5 = 5 / 2+2 / = 20.$

$M_y = -S_4.5 - S_6 . 5 = -20$ , $M_z = -S_3 .5 - S_5.5 = - 20.$

Skąd $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 20\sqrt{3} \cong 34$ kg.cm.

Kierunek tego momentu jest:

$$\cos /M,X/ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos /M,Y/ = \cos /M,Z/ = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

t.j. kierunek momentu M jest zgodny z kierunkeim przekątnej AB danego sześcianu, skierowany od punktu A ku B .

Szósty przykład. Na bryłę materialną kształtu prostokątnego równoległościanu o krawędziach równych 3,7 i 10 cm działają trzy siły po sześć kg każda. Proste działania i punkty zaczepienia tych sił są wskazane na rys117. Sprowdzić ten układ sił do postaci prostej .

Obierając osie współrzędnych w spośób wskazany na rys.117. i postępując podobnie jak w przykładzie poprzednim, otrzymamy następujące rzuty na te osie siły wypadkowej.

$W_x = S_2 = 6$ , $W_y = S_1 = 6$ i $W_z = S_3 = 6$ .

Skąd $W = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}$ kg .

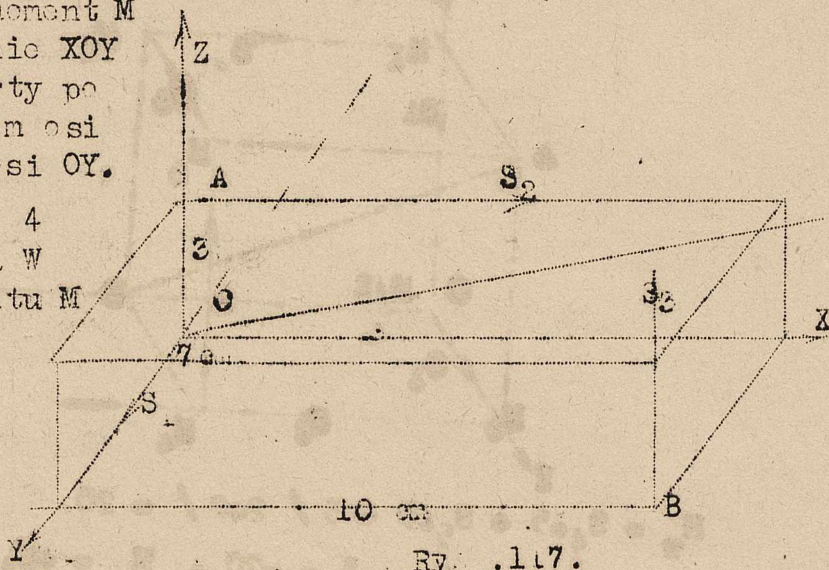
$$\cos / w,X / = \cos / W, Y / = \cos / W,Z / = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Obliczymy teraz rzuty momentu pary wypadkowej, mamy:

$M_x = S_3.7 = 42$, $M_y = -S_3.10+S_2.3 = -42$, $M_z = 0$ skąd:

$M = 42\sqrt{2}$ kg.cm$^2$ i $\cos /M,X/ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,$\cos /M,Y/ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos /M,Z/ = 0$ .



Rys. 117.

Widzimy więc, że moment M jest zawarty w płaszczyźnie XOY i dzieli nawpół kąt zawarty pomiędzy dodatnim kierunkiem osi OX i ujemnym kierunkeim osi OY.

Ponieważ /patrz § 4 rozdz VI / siła wypadkowa W jest prostopadła do momentu M pary wypadkowej:

$$\cos/W,M/ = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0 = 0,$$

więc dany układ sił sprowadza się do jednej siły wypadkowej równej $6\sqrt{3}$kg i mającej punkt zaczepienia w punkcie /$x_o$, $y_o$, $z_o$/ przy czym:

$$x_o = \frac{M_z W_x - M_y W_z}{W^2} = \frac{42.6}{32.3} = \frac{7}{3},$$

$$y_o = \frac{M_x W_z - M_z W_x}{W^2} = \frac{42.6 - 0.6}{36.3} = \frac{7}{3},$$

$$z_o = \frac{M_y . W_x - M_x . W_y}{W^2} = \frac{-42.6 - 42.6}{36.3} = -\frac{14}{3}$$

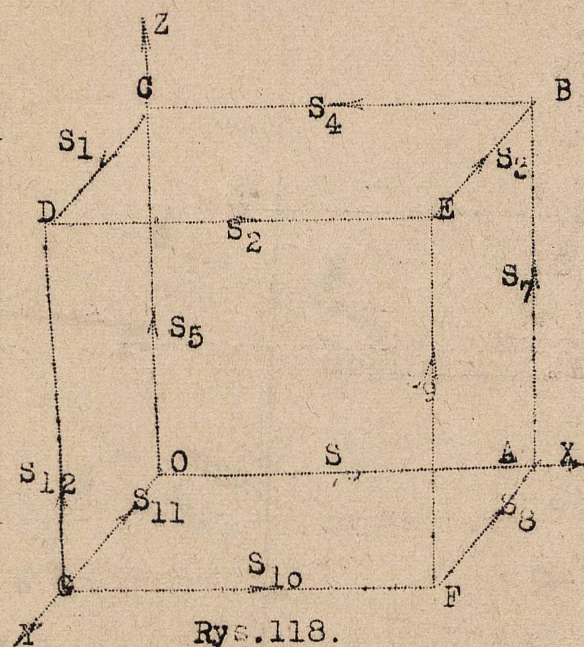
lub w dowolnym punkcie osi środkowej, której równanie jest:

$$\frac{x-\frac{7}{3}}{6} = \frac{y-\frac{7}{3}}{6} = \frac{z+\frac{14}{3}}{6}, \text{czyli } x-\frac{7}{3} = y-\frac{7}{3} = z + \frac{14}{3};$$

wzdłuż twj osi działa wypadkowa siła danego układu sił $S_1$, $S_2$ i $S_3$.

Siódmy przykład. W kierunkach krawędzi sześcianu o boku "a" działają dwanaście wzajemnie równych sił S, jak to jest wskazano na rys.118. Sprowadzić ten układ sił do postaci prostej i wyznaczyć współrzędne $x_1$ i $y_1$ punktów przecięcia się osi środkowej tego układu z płaszczyzną XOY.

Biorac osie współrzędnych w sposób wskazany na rys 118. będziemy mieć następujace trzy wyrażenia na rzuty siły wypadkowej tego układu na owe osie:




Rys.118.

$$W_x = S_2 - S_4 + S_6 + S_{10} = 2S$$
$$W_y = S_1 - S_3 - S_8 - S_{11} = -2S$$
$$W_z = S_5 + S_7 + S_9 + S_{12} = 4S. \text{ skąd}$$
$$W = \sqrt{4S^2 + 4S^2 + 16S^2} = 2S\sqrt{6}$$
i $\cos /W,X/ = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\cos /W,Y/ = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos /W,Z/ = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Rzuty momentu pary wypadkowej są następujące:

$$M_x = -S_1 a + S_3 a + S_9 a + S_{12} a = 2aS$$
$$M_y = S_2 a - S_4 a - S_7 a - S_9 a = -2aS$$
$$M_z = -S_2 a - S_3 a - S_8 a - S_{10} a = -4aS$$

więc: $M = 2aS\sqrt{6}$ i $\cos /M,X/ = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos /M,Y/ = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos /M,Z/ = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ponieważ: $\cos /W,M/ = \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0$

więc /patrz § 5 rozdziału VI /dany układ sprowadza się do skrętnika czy li do siły i pary sił, o płaszczyźnie prostopadłej do kierunku tej siły. Siła ma wielkość $2S\sqrt{6}$ i jest przyłożona w punkcie $O'$ / $x_o, y_o, z_o$ /.

przyczym

$$x_o = \frac{2}{3} a, \quad y_o = \frac{2}{3} a, \quad z_o = 0,$$

lub też w dowolnym punkcie osi środkowej, równanie której jest:

$$\frac{x - \frac{2}{3}a}{2S} = \frac{y - \frac{2}{3}a}{-2S} = \frac{z}{4S}.$$

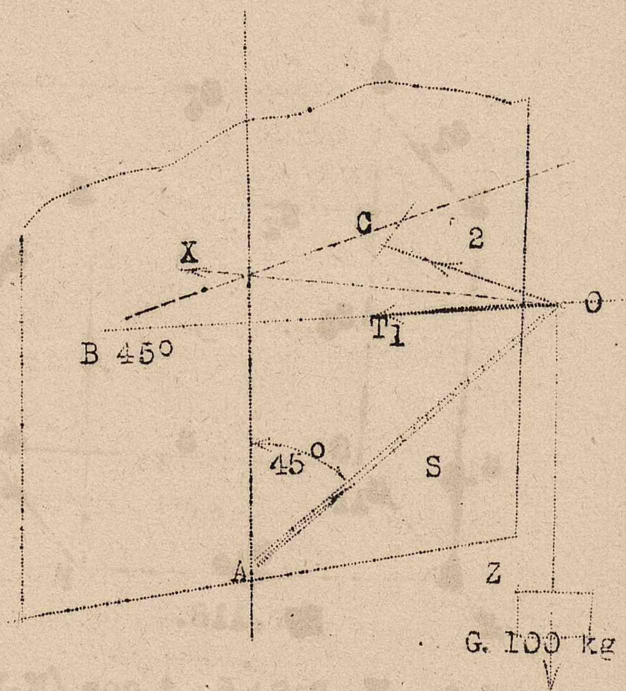
Zauważymy, że oś środkowa jest prostą działania siły $2S\sqrt{6}$.
Obliczymy teraz moment pary, mamy:

$$M_1 = M.\cos /M,W/ = 2aS\sqrt{6} \,/ -\frac{1}{3}/ = -\frac{2}{3} a S \sqrt{6}.$$

Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia się osi środkowej z płaszczyzną XOY, robimy $Z = 0$, wtedy znajdujemy, że : $X_1 = Y_1 = \frac{2}{3} a$

Osmy przykład. Ciężar G = 100 kg. rys.119. Uwiązany jest na końcu O drąga AO tworzącego kąt 45° z płaszczyzną ściany pionowej ; koniec ten przymocowany jest za pomocą dwóch równych lin OB i OC,

tworzących pomiędzy sobą kąt prosty i położonych w płaszczyźnie poziomej. Obliczyć natężenia S, $T_1$ i $T_2$ powstające wzdłuż drąga i lin.




Rys.119.

Obierzony początek współrzędnych w końcu drąga AO, oś OX wzdłuż dwusiecznej kąta BOC, oś OZ pionowo nadół, a oś OY prostopadle do OX i OZ. Równania rzutów na osie są:

$$T_1 \cos 45^\circ + T_2 \cos 45^\circ + S \cos 135^\circ = 0$$

$$T_1 \cos 45^\circ + T_2 \cos 135^\circ = 0$$

$$G + S \cos 135^\circ = 0,$$

czyli $\frac{\sqrt{2}}{2} T_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0$;

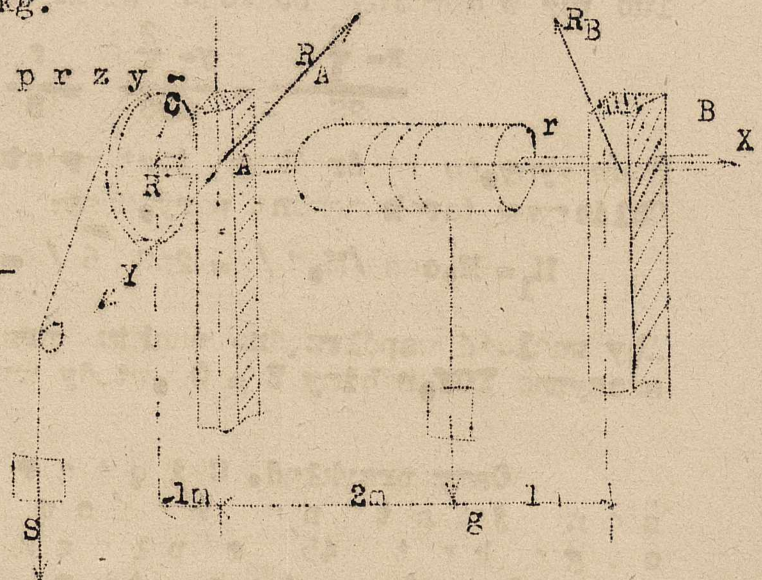
$$\frac{\sqrt{2}}{2} T_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 = 0 \;; \quad G - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0.$$

Z drugiego równania mamy, że $T_1 = T_2 = T$ t.j. natężenie obu lin są jednakowe, wtedy pierwsze równanie daje:

$$\sqrt{2}\, T - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0 \text{ , skąd } T = \frac{S}{2},$$

Z trzeciego równania obliczymy $S = \sqrt{2}\, G = 1{,}41 . 100 = 141$ kg więc $T = 70{,}5$ kg.

Dziewiąty przykład. Na wał AB, o promieniu r rys.120. nawinięta jest lina, podnosząca ciężar G, promień koła R jest sześć razy większy od promienia wału, odległość jego od łożyska A wału jest jeden metr, odległość



liny podnoszącej ciężar G od łożysk A i B są odpowiednio 2 i 1 mtr. Lina, nawinięta na koło C schodzi z niego pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu i naciągnięta jest ciężarem S = 6 kg.

Wyznaczyć ciężar G i siły podporowe $R_A$ i $R_B$ łożysk wału, w stanie równowagi nie biorąc pod uwagę ciężaru wału i koła.

Biorąc osie współrzędnych tak, aby początek był zgodny z punktem zaczepienia siły odporowej łożyska A, oś OX – osią wału, oś OZ – jest pionowo do góry, a oś OY – w kierunku poziomym i zauważywszy, iż siły odporowe $R_A$ i $R_B$ są zawarte w płaszczyznach prostopadłych do osi OX w punktach A i B. /siły tarcia pomijamy/ będziemy mieć dwa równania rzutów na osie OY i OZ i trzy równania momentów mianowicie:

$$Y_A + Y_B + S\cos 30^\circ = 0, \quad Z_A + Z_B - G + S\cos 120^\circ = 0$$

$$G.r. - S.6r = 0, \quad -3Z_B + 2G - S\cos 60^\circ = 0, \quad 3Y_B - S\cos 30^\circ = 0$$

czyli $Y_A + Y_B + \frac{\sqrt{3}}{2} S = 0, \quad Z_A + Z_B - G - \frac{1}{2} S = 0,$

$$G = 6S; \quad -3Z_B + 2G - \frac{1}{2} S = 0, \quad 3Y_B = \frac{\sqrt{3}}{2} S.$$

Ponieważ S = 6 kg. zatym G = 36 kg.; $Y_B = \sqrt{3} = 1{,}73$ kg., $Z_B = 23$ kg.

$$Y_A = -4\ 3 = -6{,}93 \text{ kg.}, \quad Z_A = 16 \text{ kg.}$$

Rys.121.

## Dziesiąty przykład.

Wiatrak o wale poziomym AC posiada cztery symetryczne skrzydła, których płaszczyzny tworzą z płaszczyzną pionową, prostopadłą do osi AC, kąty równe $30^\circ$. W odległości dwa mtr. od osi działa na każde skrzydło normalna wypadkowa ciśnień wiatru wynosząca 120 kg. Oś wiatraka obraca się w łożysku A i w czopie C. Siłę wiatru równoważy ciśnienie pionowe S na koło trybowe B o promieniu 1,2 m. W odległości BC = u = 0,5 m. Ab = m = 1 m., AF = L = o,5m. Wyznaczyć ciśnienie S i siły podporowe łożysk A i C jeżeli :

1/ wiatr dmucha na wszystkie cztery skrzydła i

2/ gdy skrzydło D jest zdjęte, a linia DE jest pionowa.

Równania układu równowagi są:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} /Z_i y_i - Y_i z_i/ = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} /X_i z_i - Z_i x_i - Z_i x_i/ = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} /Y_i y_i - X_i y_i/ = 0.$$

Obierzemy osie współrzędnych, jak jest wzkazane na rys.121 i ułożymy następującą tabelkę:

| Siły. | $X_i$ | $Y_i$ | $Z_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| na skrzydło E | $120.\cos 120^0$ | $120.\cos 30^0$ | $120.\cos 90^0$ | 0 | - L | 2 |
| na skrzydło D | $120.\cos 60^0$ | $120.\cos 30^0$ | $120.\cos 90^0$ | 0 | - L | -2 |
| na skrzydło G | $120.\cos 90^0$ | $120.\cos 30^0$ | $120.\cos 120^0$ | -2 | - L | 0 |
| na skrzydło I | $120.\cos 90^0$ | $120.\cos 30^0$ | $120.\cos 60^0$ | 2 | - L | 0 |
| S | 0 | 0 | -S | 1,2 | m | 0 |
| $R_A$ | $X_A$ | 0 | $Z_A$ | 0 | 0 | 0 |
| $R_C$ | $X_C$ | $Y_C$ | $Z_C$ | 0 | m+n | 0 |

Wstawiając wartości z tej tabelki w powyższe równania otrzymamy:

$$120.\cos 120^0 + 120.\cos 60^0 + X_C = 0$$

$$4.120 \cos 30^0 + Y_C = 0$$

$$120.\cos 120^0 + 120.\cos 60^0 - S + Z_A + Z_C = 0$$

$$2.120.\cos 30^0 + 2.120.\cos 30^0 - L.120^0 - L.120.\cos 60^0 - S.m +$$

$$+ Z_C /m+n/ = 0$$

$$2.120.\cos 120^0 - 2.120.\cos 60^0 - 2.120.\cos 120^0 - 2.120.\cos 60^0 + 1,2\ S = 0$$

$$L.120.\cos 120^0 + L.120.\cos 60^0 - 2.120.\cos 30^0 + 2.120.\cos 30^0 - X_C/m+n/ = 0$$

czyli $X_A + X_C = 0$, $120 \frac{3}{2} .4 + Y_C = 0$, $-S + Z_A + Z_C = 0$,

$-S\ m + Z_C\ /n+n/ = 0$, $1,2\ S - 480 = 0$, $X_C/m+n/ = 0$

skąd $Y_C = -240\sqrt{3}$ kg., $S = 400$ kg., $X_A = X_C = 0$, $Z_C = 266\frac{2}{3}$ i $Z_A = 133\frac{1}{3}$

Gdy skrzydło D jest zdjęte, a linia DE jest pionową, równania równowagi będą:

$$120.\cos 120^\circ + X_A + X_C = 0,\ 3.120.\cos 30^\circ + Y_C = 0\ ;$$

$$120.\cos 120^\circ + 120.\cos 60^\circ - S + Z_A + Z_C = 0$$

$$-2.120.\cos 30^\circ - L.120.\cos 10 - L.120.\cos 60^\circ - Sm + Z_C/m+n/ = 0$$

$$2.120.\cos 120^\circ + 2.120.\cos 120^\circ - 2.120.\cos 60^\circ + S.1,2 + 0$$

$$L.120.\cos 120^\circ - 2.120.\cos 30^\circ + 2.120.\cos 30^\circ - X_C/m+n/ = 0$$

czyli: $X_A + X_C = 60$, $3.120\frac{\sqrt{3}}{2} + Y_C = 0$, $-S + Z_A + Z_C = 0$;

$$120\frac{\sqrt{3}}{2}.2 - Sm + Z_C/m+n/ = 0$$

$$-3.120.\frac{1}{2}.2 + 1,2\,S = 0\ ;$$

$$-120.\frac{1}{2}.L - X_C/m+n/ = 0$$

Skąd otrzymujemy, że:

$$Y_C = -180\sqrt{3}\ \text{kg.},\ S = 300\ \text{kg.},\ X_C.\frac{3}{2} + 30 = 0\ ;\ X_C = -20\ \text{kg.}$$

$$X_A = 60 - X_C = 80\ \text{kg.},\ Z_C.\frac{3}{2} = 300 + 120\sqrt{3};\ Z_C = 200 + 80\sqrt{3} = 339\ \text{kg.}$$

$$Z_A = 300 - Z_C = 100 - 80\sqrt{3} = -39\ \text{kg.}$$

## Uwagi co do rozwiązywania zagadnień o równowadze nieswobodnej bryły.

Przy rozpatrywaniu zagadnień o równowadze nieswobodnej bryły na zasadzie V prawa statyki, bryłę czynimy swobodną, dołączając do sił, przyłożonych do bryły, reakcje połączeń i wtedy już można korzystać z wiadomych równań równowagi swobodnej bryły materialnej.

Nie zawsze jednak można z otrzymanych w taki sposób równań otrzymać wszystkie wprowadzone reakcje.

Jeżeli ilość reakcji jest większą od ilości równań równowagi, to w takim razie mamy do czynienia z wypadkiem, który zwiemy statycznie niewyznaczalnym. Jednakże trzeba zauważyć, że całkowite rozwiązanie w tych wypadkach jest możliwe, gdy ma się do dyspozycji niektóre dodatkowe równania, które można ułożyć w skutek tego lub innego praktycznego określenia reakcji.

Jeżeli takich dodatkowych równań nie ma, albo są ale w ilości niedostatecznej dla odszukania wprowadzonych w rozpatrywane zagadnienie reakcyj połączeń, to dla kompletnego rozwiązania zagadnienia o równowadze bryły, trzeba odstąpić od rozpatrywania danej bryły, jako niezmiennego układu punktów materialnych, a przyjąć pod uwagę, powstające przy działaniu przyłożonych do niej sił zmiany odległości pomiędzy poszczególnymi punktami bryły / t.zw. odkształcenia /, i te siły sprężystości, które powstają w bryle z powodu odkształceń.

A teraz powiemy kilka słów o płaszczyźnie niegładkiej, t.j. takiej, która daje reakcję nieprostopadłą do płaszczyzny, a nachyloną pod pewnym katem do normalnej do niej. Niech mamy niegładką płaszczyznę PP, o którą w punkcie A opiera się bryła, a reakcja płaszczyzny R jest skierowana pod katem do prostopadłej, wystawionej z punktu A płaszczyzny. Bryła oddziałuje na płaszczyznę siłą T równą sile R i odwrotnie skierowaną, t.zn. siła T jest ciśnieniem bryły na płaszczyznę.

R' R T T" A R" T T T'

Rys.122.

Siłę R jak i ciśnienie T rozłożymy na składowe R' i R" i na T' i T" w kierunkach prostopadłych do płaszczyzny i leżących w płaszczyźnie, jak to jest zrobione na rysunku. W takim razie siła T' nosząca nazwę n o r m a l n e g o c i ś n i e n i a, stara się wgnieść bryłę w płaszczyznę i jest zrównoważona przez normalną reakcję R'; siła T" stara się przesunąć bryłę po płaszczyźnie i równoważy się przez reakcję R", którą nazywamy siłą tarcia.

Prawa tarcia są znalezione sposobem doświadczalnym; jedno z [illegible] głosi, że siła tarcia jest proporcjonalna do normalnej reakcji [illegible]o wszystko jedno co do normalnego ciśnienia T" /, tak, że

$$T" = k R' ,$$

[illegible]zie k jest pewien współczynnik, nazywany w s p ó ł c z y n n i [illegible]i e m t a r c i a, zależnym od własności ciał, znajdujących się [illegible]stanie tarcia; wielkość jego dla różnych ciał znajduje się w tech[illegible]cznych podręcznikach.

Ponieważ z trójkata APR' mamy:

$$R" = R' \text{ tg}$$

[illegible] wyżej mieliśmy, że:

$$k = tg\,\alpha \quad i \quad \alpha = arc\,tg\,k$$

i dlatego kąt $\alpha$ nazywamy **kątem tarcia.**

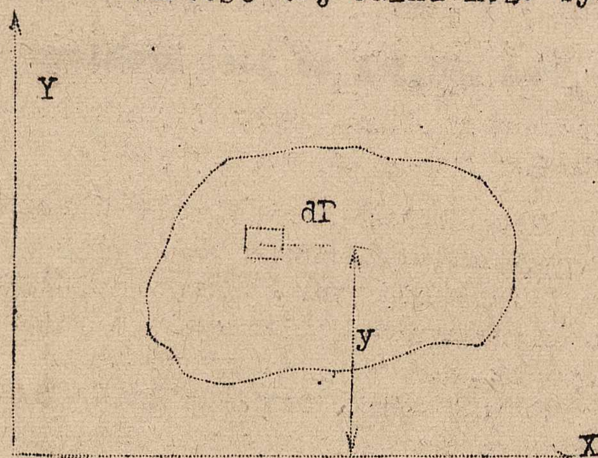
## O momentach bezwładności figur płaskich.

§.1.Momentem bezwładności płaskiej figury względem jakiejkolwiek osi X leżącej w płaszczyźnie figury nazywamy całkę :

$$I_x = \int_P y^2\,dP$$

rozprzestrzenioną na całe pole figury.

Wartość tej całki może być otrzymana analitycznie - t.zn. przez całkowanie,lub wykreślenie,lub wreszcie mechanicznie za pomocą przyrządu nazywanego integratorem.




Rys. 123.

W wypadku figur prostych **analityczne obliczenie** momentu bezwładności może być wykonane z łatwością.Weźmiemy np.prostokąt i określimy jego moment bezwładności względem jego podstawy /os MN /.Podzielmy naszą figurę na nieskończenie małe elementy liniami równoległymi do podstawy MN .Pole tego elementu będzie:

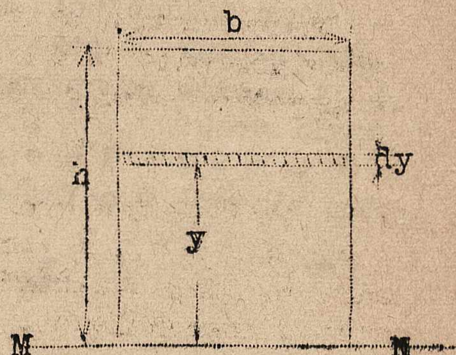
$$dP = b.\,dy\,.$$

Obliczenie momentu bezwładności sprowadza się do obliczenia całki:

$$\int_P b dy . y^2$$

Aby całkowanie rozprzestrzenić na całe pole prostokąta trzebyby zmieniać w granicach od 0 do h,to znaczy:

$$I_x = \int_0^h b.dy.y^2 = \frac{b.y^3}{3}\Big|_0^h = \frac{b.h^3}{3}$$




Rys.124 .

Wzór ,wyprowadzony dla prostokąta,może być zastosowany i dla równoległoboku,ponieważ moment bezwładności figury się nie zminia, jeżeli każdy element przesunąć równolegle do osi względem której oblicza się moment. Znając moment bezwładności prostokąta,z łatwością obliczymy momenty bezwładności płaskich figur,złożonych z prostokątów.

Dla obliczenia momentu bezwładności t r ó j k ą t a względem podstawy,tak samo,jak i dla prostokąta,podzielimy figurę na nieskończenie małe elementy liniami równoległymi do podstawy.Pole takiego elementu mn oznaczymy tak:

$$dP = \frac{b/h-y/}{h} \cdot dy$$

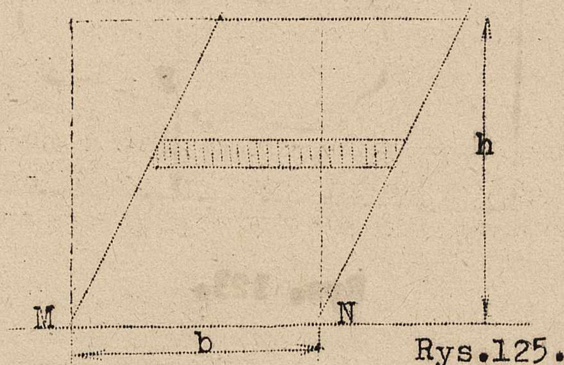
a poszukiwany moment bezwładności będzie:

$$I_x = \int_0^h \frac{b/h-y/}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

Jeżeli my teraz dopełnimy trójkąt ABC,jak to jest zrobione na rys.126. do równoległoboku ABDC, to moment bezwładności otrzymanego równoległoboku będzie $\frac{bh^3}{3}$, zatym moment bezwładności trójkąta BCD względem osi AC, przechodzącej przez wierzchołek C i równoległej do podstawy BD będzie:

$$I = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}.$$

Rozpatrzymy teraz momenty bezwładności najprostszych figur z obwodami krzywoliniowymi.



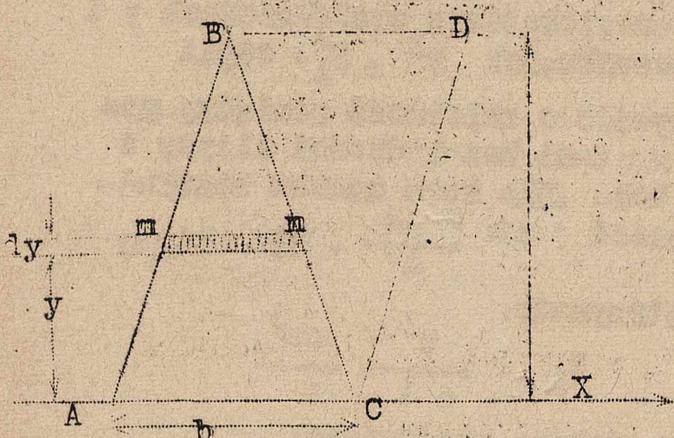
Rys.125.

Mamy jakieś pole P i biegun O w płaszczyźnie tego pola /rys 127/.Podzielimy to pole na nieskończenie małe elementy dP i każdy z tych elementów pomnożymy przez kwadrat jego odległości od bieguna czyli przez $\rho^2$, w takim razie będziemy nazywać m o m e n t e m b e z w ł a d n o ś c i b i e g u n o w y m tego pola względem bieguna O całkę określoną:

$$I_o = \int_F \rho^2 dP.$$

Od szukamy teraz b i e g u n o w y m o m e n t b e z w ł a d n o ś c i p o l a k o ł a o p r o m i e n i u r względem bieguna O ,znajdującego się w środku koła.Srodek koła przyj-

niemy za początek prostokątnego i prostoliniowego układu osi współrzędnych. Opiszemy dwa koncentryczne koła promieniami $\rho$ i $\rho + d\rho$, otrzymamy wtenczas zakreskowany pasek. Podzielimy go na nieskończenie małe elementy dP. Mnożąc każdy z tych elementów paska dP przez $\rho^2$ i sumując je otrzymamy:




Rys. 126.

$$\sum \rho^2 dP = \rho^2 \sum dP,$$

ponieważ $\rho$ jest stałym dla wszystkich elementów zakreskowanego paska. Ponadto jest:

$$\sum dP = \pi/\rho + d\rho/^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2 + 2\pi\rho\, d\rho + \pi/d\rho/^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho\, d\rho,$$

jeżeli odrzucimy nieskończenie małe wyrazy względem $2\pi\rho d\rho$. W takim razie:

$$\sum \rho^2 dP = 2\pi \rho^3 \quad d\rho$$

będzie biegunowym momentem bezwładności paska koła względem bieguna O. Zmieniając miejsce $\rho$ od O do r, otrzymamy biegunowy momnt bezwładności pola koła względem środka koła O, czyli:

$$I_b = \int_0^r 2\pi\rho^3 \quad d\rho = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Z powodu symetrii wnioskujemy, że momenty bezwładności koła względem wszystkich osi, przechodzących przez jego środek są jednakowe, a więc:

$$I_x = I_y = \frac{I_x + I_y}{2}$$

Z określenia momentu bezwładności wynika:

$$I_x + I_y = \int_P y^2 dP + \int_P x^2 dP = \int_P /x^2 + y^2/ \, dP = \int_P \rho^2 dP.$$

a ponieważ $\int_P \rho^2 dP$ jest to właśnie biegunowy moment bezwładności, który oznaczyliśmy przez $I_b$, a którego wartość obliczyliśmy:

$$I_b = \frac{\pi r^4}{2}$$

więc : $$I_x = I_y = \frac{I_b}{2} = \frac{\pi r^4}{4} .$$

Moment bezwładności e l i p s y względem osi OX najprościej możemy otrzymać porównując z kołem przedstawionym na rys 127. linia kreskowana. Elipsę można rozpatrywać jako rzut koła, w takim razie między odpowiednimi rzędnymi koła i elipsy będzie taka zależność:

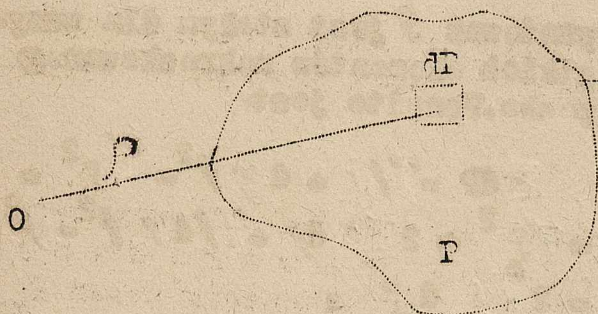
$$y : y_1 = b : a$$

Momenty bezwładności elementarnych prostokątów o wysokościach y i $y_1$ względem OX będą do siebie w stosunku, jak $y^3 : y_1^3$, czyli jak $b^3 : a^3$. Taka sama będzie oczywiście zależność pomiędzy momentami bezwładności elipsy i koła. Dla koła moment bezwładności jest: $\frac{\pi a^4}{4}$. Dla elipsy otrzymamy:

$$I_x = \frac{a^4 \pi}{4} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{ab^3 \pi}{4}$$

Podobnie znajdziemy:

$$I_y = \frac{ba^3 \pi}{4}$$




Rys.127.

Z otrzymanych rezultatów znajdziemy biegunowy moment bezwładności elipsy:

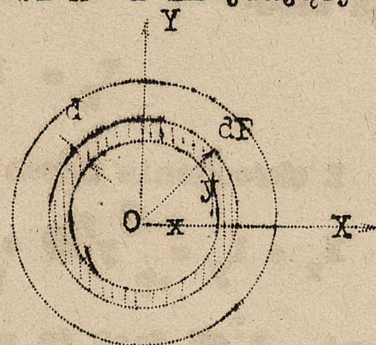
$$I_b = I_x + I_y = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi ab}{4} / a^2 + b^2 /$$

Z a l e ż n o ś ć m i ę d z y m o m e n t a m i b e z w ł a d n o ś c i w z g l ę d e m o s i r ó w n o l e g ł y c h.

Przypuśćmy, że mamy moment bezwładności figury $I_x$, względem osi $X^1$, przechodzącej przez środek figury, a mamy odszukać moment bezwładności $I_x$ względem osi X, równoległej do osi X' i znajdujący się w odległości od niej. Jeżeli przez y nazwiemy odległość jakiegokolwiek elementu pola od osi X, a przez y' - odległość od osi X', to oczywiście:

$$I_x = \int y^2 dP = \int /y' + a/^2 dP =$$

$$= \int_P y'^2 dP + \int_P a^2 dP + 2a \int_P y' dP$$




Rys.128.

Pierwsza z tych całek jest niczem innym, jak momentem

bezwładności figury względem osi X', co zaś się tyczy ostatniego wyrazu, to on jest zerem, ponieważ $\int_P y'dP$ jest statycznym momentem figury względem osi, przechodzącej przez jej środek ciężkości. Więc ostatecznie otrzymamy:

$$I_X = I_{x'} + a^2 P$$

Otrzymany wzór daje możność obliczania momentu bezwładności płaskiej figury względem dowolnej osi, znajdującej się w płaszczyźnie figury, jeżeli jest wiadomy moment bezwładności figury względem równoległej do niej osi, przechodzącej przez środek ciężkości figury, dlatego w dalszym rozważaniu możemy ograniczyć się do odszukiwania momentu bezwładności figur względem osi, przechodzących przez ich środek ciężkości.

## G ł ó w n e   o s i e,

Jeżeli pole figury podzielimy na nieskończenie małe elementy, każdy z tych elementów pomnożymy przez iloczyn ze współrzędnych i ułożymy całkę:

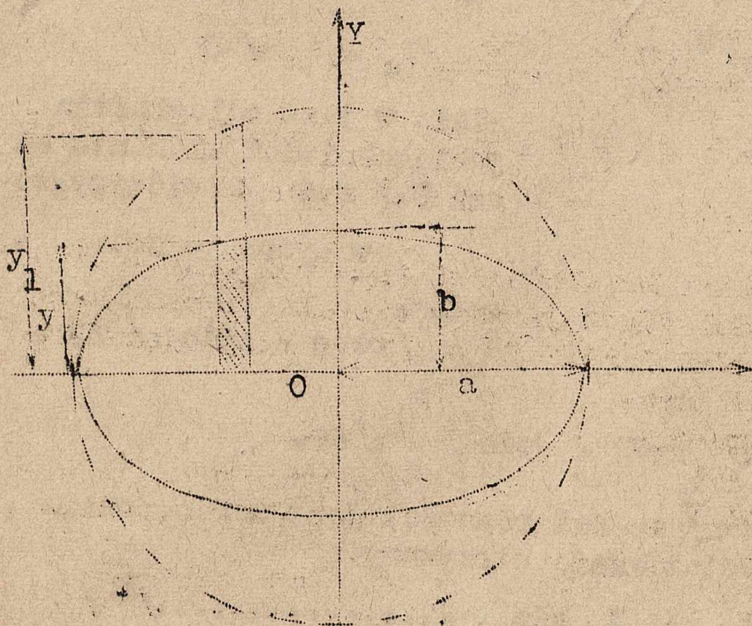
$$\int_P xydP$$

gdzie całkowanie jest rozprzestrzenione na całe pole figury, to otrzymamy o d ś r o d k o w y   m o m e n t   b e z w ł a d n o ś c i pola figury względem osi X iY. Wielkość jego oznaczymy przez $I_{xy}$.

Zawsze można układ prostokątny osi obrócić tak, że odśrodkowy moment bezwładności będzie zerem. Rzeczywiście niech dla obranego kierunku osi $I_{xy}$ ma wartość dodatnią. Jeżeli osie będziemy obracać dookoła początku układu, to współrzędne będą zmieniać swoją wielkość, a zarazem z tym będzie się zmieniać wielkość $I_{xy}$. Przypuśćmy że obróciliśmy osie o kąt $90^0$ w kierunku wskazanym strzałką/131/, niech x' i y' są nowymi współrzędnymi jakiegokolwiek elementu koła, wtedy oczywiście:

$$x' = y, \; y' = -x$$

W tym wypadku każdy element całki $\int_P xydP$




Rys.129.

zmieni swój znak, zachowując początkową absolutną wartość, a więc:

$$I_{x'y'} = -I_{xy}.$$

Ponieważ przy obrocie osi wielkość $I_{xy}$ zmienia się w sposób ciągły, to przechodząc od wartości dodatnich do ujemnych musi przyjąć wartość zero. Te kierunki osi współrzędnych, dla których odśrodkowy moment bezwładności jest zerem, nazywamy **głównymi kierunkami**, a odpowiadające im osi - **głównymi osiami bezwładności.**

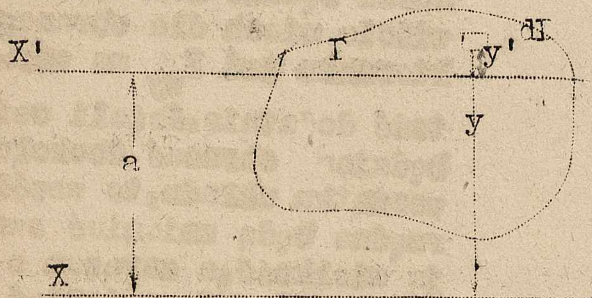
W dalszym rozważaniu będziemy określać momenty bezwładności figur względem osi, przechodzących przez środek ciężkości figury. Główne osi przechodzące przez środek ciężkości, będziemy nazywać **głównymi środkowymi osiami bezwładności.**

Jeżeli mamy momenty bezwładności względem głównych osi, to z łatwością możemy obliczyć momenty bezwładności względem osi, dowolnie nachylonych do głównych.

Niech osie X i Y są główne, wtedy mamy:

$$I_x = \int_P y^2 dP \quad i \quad I_y = \int_P x^2 dP$$

Żeby obliczyć moment bezwładności figury względem jakiejkolwiek osi U, nachylonej pod katem $\alpha$ do osi X, trzeba obliczyć sumę:




Rys.130.

$$I_u = \int v^2 dP$$

gdzie v jest odległością jakiegokolwiek elementu od osi U. Z rys. 132 widzimy, że:

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

zatem:

$$I_u = \int_P (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dP =$$

$$= \cos^2\alpha \int_P y^2 dP - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_P xy dP + \sin^2\alpha \int x^2 dP.$$

Środkowy wyraz w prawej części równości jest zerem, ponieważ osie X i Y są główne. Ostatecznie otrzymamy:

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /X/$$

Otrzymany wzór daje możność obliczenia $I_u$ dla dowolnego kąta $\alpha$.

## Elipsa bezwładności.

Żeby zbadać zmianę momentu bezwładności figury w zależności od kąta nachylenia osi, wprowadzimy nowe pojęcie. Nazwiemy

p r o m i e n i e m b e z w ł a d n o ś c i dla jakiejkolwiek osi U wielkość:

$$r_u = \sqrt{\frac{I_u}{P}}$$

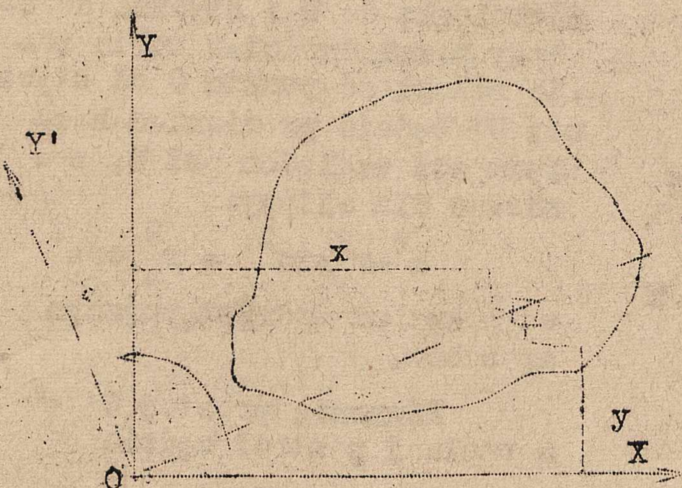
wtenczas dzieląc ostatni wzór / / przez P, otrzymamy:

$$r_u^2 = r_x^2 \cos^2\alpha + r_y^2 \sin^2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots / \text{II} /$$

Będziemy na każdej osi odkładać $\rho_u$, odwrotnie proporcjalną do odpowiedniego promienia bezwładności:

$$\rho_u = \frac{m^2}{r_u}$$

gdzie m jest długością pewnego, narazie dowolnego odcinka.




Rys .131.

W taki sposób wzdłuż osi X odłożymy wielkość:

$$\rho_x = \frac{m^2}{r_x}$$

wzdłuż osi Y - wielkość:

$$\rho_y = \frac{m^2}{r_y}$$

Równanie / I I / w tym wypadku otrzyma postać:

$$\frac{1}{\rho_u^2} = \frac{1}{\rho_x^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\rho_y^2}\sin^2\alpha \ldots / \text{III}$$

Jeżeli M jest końcem $\rho_u$, to oczywiście współrzędne tego punktu będą:

$$x = \rho_u \cos\alpha \quad , \quad y = \rho_u \sin\alpha \; .$$

Wstawiając otrzymane wyrazy w równanie / I I I /, otrzymamy pomiędzy współrzędnymi x i y taką zależność:

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1 ,$$

t.j. koniec odcinka $\rho_u$ przy zmianie końca $\alpha$ przesuwa się po elipsie, której półosiami będą $\rho_x$ i $\rho_y$.

Dla określenia odcinka $\rho_u$, my wybraliśmy dowolną długość m, zmieniając ją otrzymujemy cały szereg elips. Najwygodniej dla m wybrać długość określoną równaniem:

w tym wypadku:

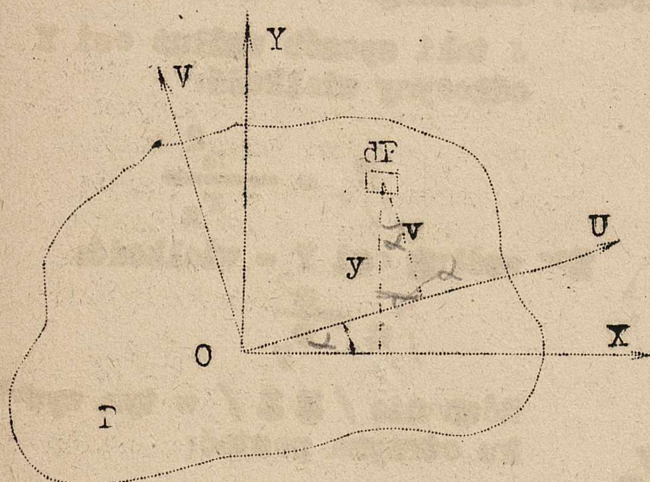
$$x = \frac{n^2}{r_x} = r_y , \qquad y = \frac{n^2}{r_y} = r_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /****/$$

przyjmie postać:

$$\frac{x^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_x^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /*****/.$$

Wynika więc, że półosiami elipsy będą promienie bezwładności, tylko po osi X odkłada się promień bezwładności $r_y$, a po osi Y $r_x$. Zbudowaną na tych półosiach elipsę będziemy nazywać e l i p - s ą b e z w ł a d n o ś c i.

Mając elipsę bezwładności, mamy możność określić promień bezwładności dla osi U, nachylonej pod kątem do osi X. Dlatego należy tylko przeprowadzić linię U', równoległą do U i styczną do elipsy bezwładności. W takim razie odległość punktu O od stycznej U' będzie promieniem bezwładności względem osi U, ponieważ dla elipsy:




Rys.132.

$$h^2 = r_y^2 \sin^2 + r_x^2 \cos^2$$

co można udowodnić następującym sposobem.

Równanie prostej U' w normalnej postaci będzie:

$$h = - x\sin + y\cos .$$

Ponieważ U' jest styczną do elipsy w punkcie $M_o\ /x_o,\ y_o\ /$, to równanie jej można napisać tak:

$$\frac{x_o x}{r_y^2} + \frac{y_o y}{r_x^2} = 1$$

Porównując otrzymane dwa równania, które są równaniami tej samej prostej U', otrzymamy:

$$\frac{\frac{x_o}{r_y^2}}{-\sin} + \frac{\frac{y_o}{r_x^2}}{\cos} = \frac{1}{h}$$

Podnosząc do kwadratu, otrzymamy:

$$\frac{\frac{x_o^2}{r_y^2}}{r_y^2 \sin^2} = \frac{\frac{y_o^2}{r_x^2}}{r_x^2 \cos^2} = \frac{1}{h^2},$$

skąd:

$$\frac{\frac{x_o^2}{r_y^2} + \frac{y_o^2}{r_x^2}}{r_y^2 \sin^2\alpha + r_x^2 \cos^2\alpha} = \frac{1}{h^2},$$

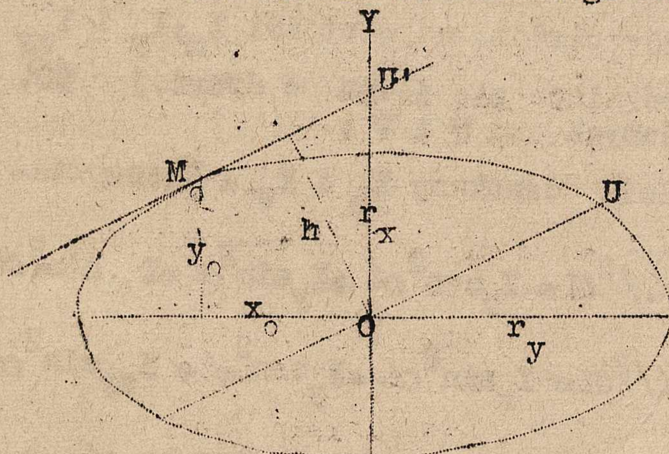
$$\frac{1}{r_y^2 \sin^2\alpha + r_x^2 \cos^2\alpha} = \frac{1}{h^2}$$

zatym:

$$h^2 = r_y^2 . \sin^2\alpha + r_x^2 \cos^2\alpha .$$

## Odszukanie głównych osi bezwładności.

Określenie kierunków głównych sprowadza się do określenia tych kierunków, dla których odśrodkowy moment bezwładności jest zerem. Niech X i Y będą osiami układu prostokątnego współrzędnych, dla których są wiadome momenty bezwładności:




Rys.134.

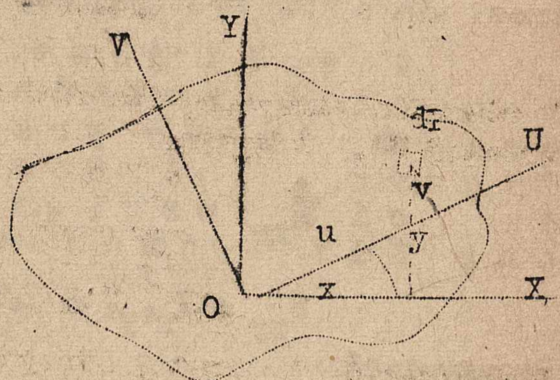
$$I_x = \int_F y^2 dF \quad i \quad I_y = \int_F x^2 dF$$

i odśrodkowy moment bezwładności:

$$I_{xy} = \int_F xy dF$$

Potrzeba nam odszukać taką wartość kąta , przy której odśrodkowy moment bezwładności względem nowych osi U i V:

$$I_{uv} = \int_F uv dF = 0$$




Rys.135.

Z rys.135 mamy:

$$v = y \cos\alpha - x \sin\alpha,$$

$$u = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$

a zatym:

$$I_{uv} = \int_F /y \cos\alpha - x \sin\alpha/ .$$

$$. /x \cos\alpha + y \sin\alpha/ \, dF =$$

$$\int /xy \cos^2\alpha - x^2 \sin\alpha \cos\alpha + y^2 \sin\alpha \cos\alpha - xy \sin^2\alpha/ dF$$

$$= \sin\alpha \cos\alpha \int\limits_F /y^2 - x^2/ \, dF + /\cos^2\alpha - \sin^2\alpha/ \int\limits_F xy dF =$$

$$J_{uv} = \frac{\sin 2\alpha}{2} /I_x - I_y/ + \cos 2\alpha \, I_{xy}.$$

Aby osie U i V były głównymi trzeba, żeby:

$$I_{uv} = 0$$

czyli:

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} /I_x - I_y/ + \cos 2\alpha \, I_{xy} = 0,$$

skąd:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Wstawiajac w otrzymany wzór wiadome na wartości $I_x$, $I_y$ i $I_{xy}$ znajdziemy dla dwie wartości, różniące się jedna od drugiej o 90°. Te wartości określają kierunek głównych osi U i V.

Jeżeli mamy , to z łatwością odszukamy $I_u$ i $I_v$. Rzeczywiście:

$$I_u = \int\limits_F v^2 dF = \int\limits_F /y.\cos\alpha - x.\sin\alpha/^2 dF = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = \int\limits_F u^2 dF = \int\limits_F /y.\sin\alpha + x.\cos\alpha/^2 dF = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

Przy odszukiwaniu kierunku głównych osi U i V, trzeba wiedzić $I_{xy}$. Określenie tej wielkości sprowadza się do odszukania całki $\int\limits_F xy dF$. W niektórych wypadkach obliczenie $I_{xy}$ znacznie się upraszcza. Za pomoca następującego twierdzenia:

J e ż e l i j e s t w i a d o m y o d ś r o d k o w y m o m e n t b e z w ł a d n o ś c i $I_{x'y'}$, w z g l ę d e m o s i, p r z e c h o d z ą c y p r z e z ś r o d e k c i ę ż k o ś c i f i g u r y , t o o d ś r o d k o w y m o m e n t b e z w ł a d n o ś c i $I_{xy}$ w z g l ę d e m r ó w n o l e g ł y c h i m o s i X i Y m o ż n a o b l i c z y ć w g w z o r u:

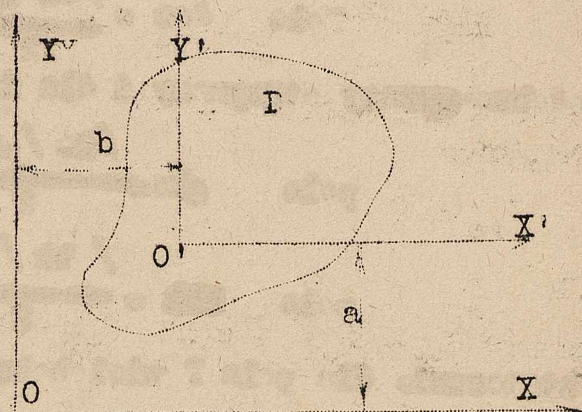
$$I_{xy} = I_{x'y'} + a.b.F \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / \quad /$$

Rzeczywiście:

$$I_{xy} = \int\limits_F xy dF = \int\limits_F /x' + a//y' + b/ \, dF = \int\limits_F x'y' dF + \int\limits_F ab.dF + \int\limits_F by' dF +$$

$$+ \int\limits_F ax' dF.$$

Ostatnie dwa wyrazy są zerami, ponieważ $\int\limits_F y'dF$ i $\int\limits_F x'dF$ są statycznymi momentami pola F względem osi x' i y', które przechodzą przez środek ciężkości. Przyjmując to pod uwagę przychodzimy do wzoru /XXXX/ rys.136.



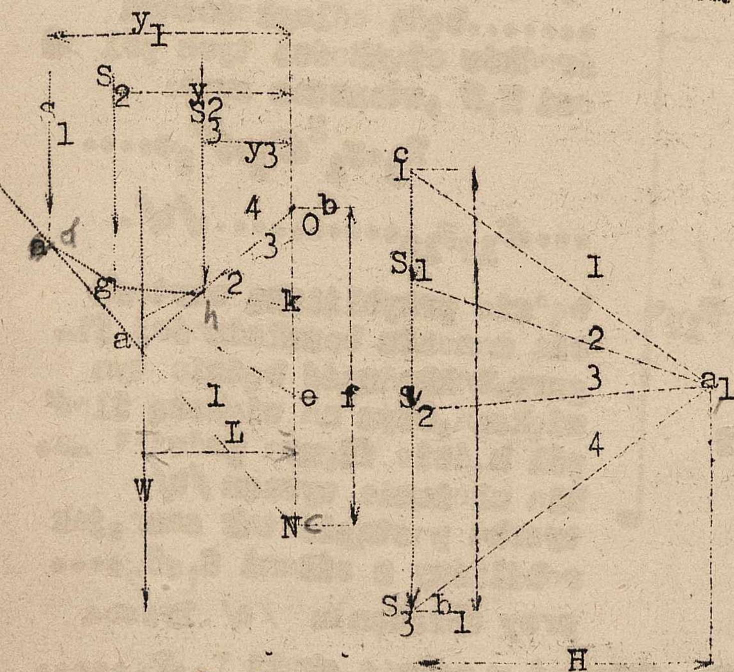

W y k r e ś l n y s p o s ó b o d s z u k a n i a m o m e n t u b e z w ł a d n o ś c i.

Przy obliczaniu momentu bezwładności płaskiej figury względem danej osi trzeba figurę podzielić na elementarne pola, ułożyć iloczyn z wielkości tych pól przez kwadrat ich odległości od osi i obliczyć otrzymaną w taki sposób sumę tych iloczynów. Wszystkie te operacje mogą być wykonane sposobem wykreślnym, dlatego trzeba tylko skorzystać ze sposobu, który się stosuje w statyce wykreślnej przy określaniu momentu układu sił równoległych.

Przypuśćmy, że dany nam jest układ sił S, $S_2$ i $S_3$. Dla odszukania momentu tych sił względem danego punktu trzeba wypadkową W tego układu sił pomnożyć przez odpowiednie ramię L. Jeżeli przyjąć pod uwagę, że △ abc jest podobny do △ $a_1b_1c_1$ /boki trójkątów są równoległe/ to można napisać W : F= H : L skąd:

$$W \cdot L = H \cdot f$$

t.zn., że dla określenia momentu układu sił równoległych względem danego punktu leżącego w płaszczyźnie działania sił trzeba przez ten punkt przeprowadzić prostą równoległą siłom wziąć odcinek prostej f, zawarty między skrajnymi bokami wieloboku Varignona i pomnożyć go przez odległość biegunową H. W taki sposób można określić moment każdej oddzielnej siły. Jeżeli chcemy np. odszukać moment siły $S_1$, to dlatego prze-




Rys. 37.

dłużymy boki 1 i 2 wieloboku Varignon'a do przecięcia ich z osią MN. Iloczyn odcinka cc przez biegunową odległość H da nam poszukiwany moment. Z łatwością udowodnimy, że ten iloczyn równa się $S_1 y_1$.

Rozpatrzymy jakie znaczenie ma pole △ dcc.

$$\text{Pole } \triangle\ dcc = \frac{/cc/ \cdot y_1}{2} = \frac{S_1 \cdot y_1^2}{2 \cdot H}$$

podobne wyrazy otrzymamy i dla trójkątów odpowiadających siłom $S_2$ i $S_3$:

$$\text{pole } \triangle\ gke = \frac{/ke/ \cdot y_2}{2} = \frac{S_2 \cdot y_2^2}{2 \cdot H}$$

$$\text{pole } \triangle\ hbk = \frac{/bk/ \cdot y_3}{2} = \frac{S_3 \cdot y_3^2}{2 \cdot H}$$

Ostatecznie dla pola F wieloboku dghbc otrzymamy wyraz :

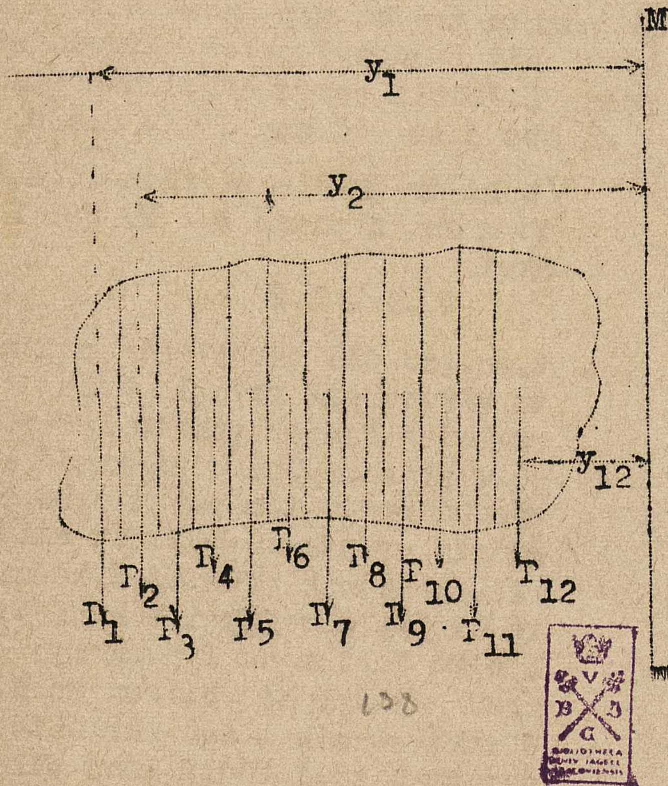
$$F = \triangle dcc + \triangle gke + \triangle hbk = \frac{1}{2H} /S_1 \cdot y_1^2 + S_2 y_2^2 + S_3 \cdot y_3^2 /$$

skąd:

$$S_1 \cdot y_1^2 + S_2 \cdot y_2^2 + S_3 \cdot y_3^2 = 2\, H.F \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /a/.$$

Z tego można skorzystać przy odszukiwaniu momentów bezwładności płaskich figur. Przypuśćmy, że musimy odszukać moment bezwładności figury przedstawionej na rys.138. względem osi MN. Podzielmy figurę na pola $F_1$, $F_2$, $F_3$, ....F i niech $y_1$, $y_2$, $y_3$ ....... będą odległościami środków ciężkości tych pól od osi M,N, wtenczas suma:

$$F_1 \cdot y_1^2 + F_2 \cdot y_2^2 + \ldots\ldots F_{12} y_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots /b/.$$



138

będzie przybliżoną wartością momentu bezwładności figury. Dokładność będzie tym większa, czym na większą ilość pól będzie figura podzielona. Dla ułożenia wyrazu /b/ trzeba postąpić tak samo, jak robiliśmy z siłami $S_1$, $S_2$, ... przy układaniu /a/. Trzeba tylko przy budowie wieloboku sił odkładać w pewnej skali $F_1$, $F_2$..... odległość biegunowa w tym wypadku będzie przedstawiać pewne pole a iloczyn 2 H.F będzie mieć wymiar /długość/ $^4$, co odpowiada wymiarowi momentu bezwładności płaskiej figury.